ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

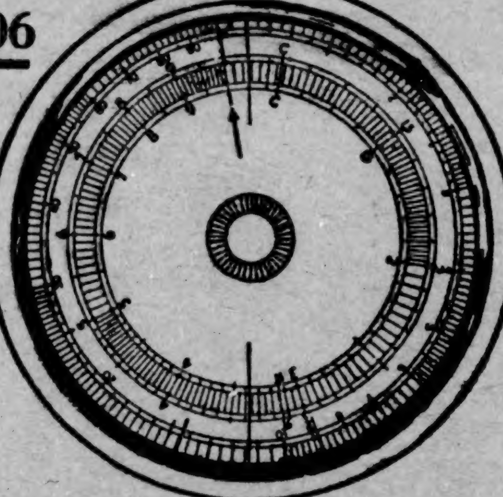
: Band 5 : Juni 1925

:: Heft 3 :: Seite 185 bis 280

INHALT:



V*D*I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19



ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 5 **Ende Juni 1925** **Heft 3**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Formänderung sehr dünner kreisförmiger Platten und zylindrischer Schalen unter konstantem Innendruck.

Von **THEODOR PÖSCHL** in Prag.

Bei der Bearbeitung der demnächst erscheinenden zweiten Auflage der zuerst i. J. 1913 (gemeinsam mit v. Terzaghi) herausgegebenen Sonderschrift: »Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden« habe ich eine Gliederung der verschiedenen Berechnungsweisen der Behälter nach den vorherrschenden Eigenschaften angestrebt. Dabei haben sich insbesondere für sehr dünne Platten und Schalen — das sind solche mit großen Durchbiegungen im Verhältnis zur Schalendicke und vernachlässigbarer Biegungsfestigkeit — nicht unerhebliche Vereinfachungen der Darstellung und der üblichen Berechnungsweise ergeben, die hier im Zusammenhange mitgeteilt werden sollen. Solche Vereinfachungen ergeben sich zunächst für die Berechnung der sehr dünnen kreisförmigen Platten (Häute), die zuerst von H. Hencky[1]) gegeben wurde, dessen Darstellung nahezu unverändert in die gebräuchlichen Lehrbücher (insb. A. und L. Föppl) übergangen ist. Auch die Berechnung der Formänderung und Spannungsverteilung in sehr dünnen zylindrischen Schalen läßt sich in ähnlicher Weise durchführen, nur muß man bei der Platte auch die quadratischen Glieder der Formänderung beibehalten, während man beim dünnen Zylinder schon mit den linearen Gliedern brauchbare Ausdrücke erhält und die Beibehaltung der quadratischen nur bedeutungslose Korrekturen mit sich bringt.

Die in A. u. L. Föppls bekanntem Lehrbuche »Drang und Zwang« I. Bd., S. 216ff. gegebene Ableitung der Gleichungen für dünne Platten mit großer Ausbiegung aus dem Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit verwertet dieses Prinzip übrigens nur bezüglich der Verschiebungen in Richtung der Achse; die Folge davon ist, daß aus dem Prinzip

[1]) H. Hencky, Ueber den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegungsfestigkeit. Z. f. Math. u. Physik, Bd. 63 (1915), S. 311.

nur eine der notwendigen Gleichungen gewonnen wird, während die andere auf ganz anderem von jenem Prinzip ganz unabhängigem Wege abgeleitet wird. Wie an anderer Stelle gezeigt werden soll, können beide Gleichungen unmittelbar aus dem Variationsproblem erhalten werden, wenn alle Komponenten der Formänderung als gleichberechtigt und voneinander unabhängig beibehalten werden.

I. Dünne Kreisplatte.

1. Elementarer Ansatz. Der einfachste Weg zur Berechnung der Formänderung und der Spannungsverteilung in einer dünnen Kreisplatte ist durch folgenden Vorgang gegeben. Der Formänderungszustand der Platte wird durch zwei Größen, und zwar durch die Dehnungen in Richtung der Meridiane, ε, und der Breitenkreise, ε_1, beschrieben, der Spannungszustand durch die zwei entsprechenden Spannungen S und S_1. Zur Berechnung dieser vier Größen stehen vier Gleichungen zur Verfügung, und zwar je zwei »stereostatische« und zwei »elastostatische« Bedingungen (die ersteren, die für die gedehnte Platte gelten, die dabei als erstarrt anzusehen sind, werden gewöhnlich als die »statischen« schlechthin, die letzteren als die »elastischen« Gleichungen bezeichnet). Das erste Gleichungspaar kann in verschiedener Form angesetzt werden; am einfachsten gelangt man zum Ziele, wenn man

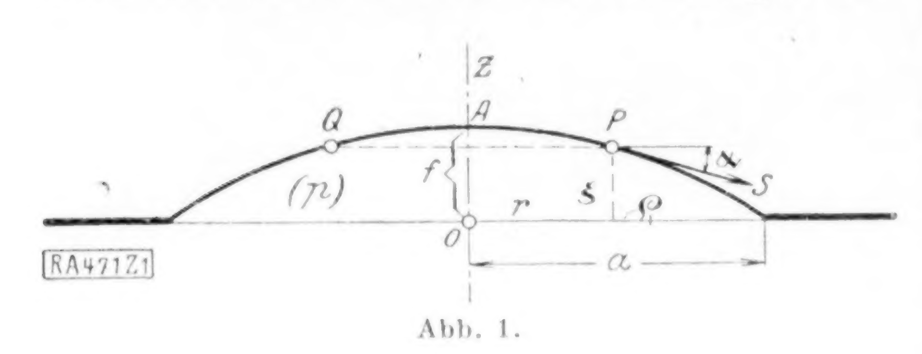


Abb. 1.

zunächst das Gleichgewicht des durch den Schnitt PQ (Abb. 1) abgetrennten Teiles für die z-Richtung betrachtet; dies liefert die Gl.:

$$S \cdot 2\, r\, \pi \cdot \sin \alpha = r^2\, \pi \cdot p\,.$$

Sei ζ die Verschiebung in Richtung der Plattenachse, so ist $\sin \alpha = - d\zeta/dr$ und es folgt:

$$-\sin \alpha = d\zeta/dr = -p/2 \cdot r/S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Als zweite nehmen wir die Gleichung

$$S_1 = \frac{d\,(S\,r)}{d\,r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

die das Gleichgewicht der auf ein Plattenteilchen einwirkenden Kräfte für die Richtung der Tangente zur Platte ausdrückt.

Die elastostatischen Gleichungen sind durch das Hookesche Gesetz gegeben, in dem wir für die Verzerrung in der Richtung des Meridians die Summe aus der Dehnung du/dr in der Richtung des Radius r (u = elastische Verschiebung in Richtung von r) und der durch Schrägstellung des gedehnten Plattenelementes verursachten Formänderung 2. Ordnung heranziehen; sei δs die Länge eines Elementes in Richtung des Meridians, das vor der Dehnung die Länge δs hatte, so ist die zugehörige Dehnung

$$\frac{\delta s - \delta r}{\delta r} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2} - 1 \sim {}^1/_2 \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2.$$

Das durch Hinzufügung der quadratischen Glieder in den Formänderungen erweiterte Hookesche Gesetz liefert daher die Gleichung[1]):

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{dr} + {}^1/_2 \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = \frac{1}{e} \cdot \left(S - \frac{1}{m} \cdot S_1\right) \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ \varepsilon_1 &= \frac{u}{r} \qquad\qquad\qquad\;\; = \frac{1}{e} \cdot \left(S_1 - \frac{1}{m} \cdot S\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4). \end{aligned}\right.$$

Aus den vier Gl. (1) bis (4) sind die vier Größen u, ζ, S, S_1 zu berechnen.

Die Spannungen S und S_1 sind in allen diesen Gleichungen nicht auf 1 cm² Querschnittsfläche, sondern auf 1 cm Länge — in einer Tangentenrichtung zur Fläche gemessen — bezogen; aus ihnen ergeben sich die Einheitsspannungen, wenn h die Blechstärke bedeutet, durch:

$$\sigma = S/h\,, \quad \sigma_1 = S_1/h.$$

---

[1]) Es ist wünschenswert, für die Poissonsche Zahl (m) eine kurze Bezeichnung zu besitzen — es sei hiefür die Bezeichnung »Querzahl« in Vorschlag gebracht, und ihre allgemeine Einführung empfohlen.

Ebenso bedeutet »e« die auf 1 cm Länge bezogene Elastizitätszahl in kg/cm; e steht mit der sonst üblichen Elastizitätszahl E — dem Elastizitätsmodul — in der Beziehung

$$e = E \cdot h.$$

2. Die **Auflösung dieser Gleichungen** vollzieht sich nun in folgender Weise: Die Elimination von u aus den beiden Gl. (3) und (4) ergibt zunächst:

$$\frac{d}{d\,r}\left[r\left(S_1 - \frac{1}{m}\cdot S\right) - \left(S - \frac{1}{m}\,S_1\right) + \frac{e}{2}\left(\frac{d\,\zeta}{d\,r}\right)^2\right] = 0.$$

Wegen der Gl. (2) fällt der Einfluß der Querzahl m aus dieser Gleichung vollständig heraus und es bleibt:

$$\frac{d\,(S_1\,r)}{d\,r} - S + \frac{e}{2}\cdot\left(\frac{d\,\zeta}{d\,r}\right)^2 = r\,\frac{d\,S_1}{d\,r} + S_1 - S + \frac{e}{2}\cdot\left(\frac{d\,\zeta}{d\,r}\right)^2 = 0$$

oder unter abermaliger Heranziehung der Gl. (2) die bekannte Gleichung:

$$r\,\frac{d}{d\,r}\,(S_1 + S) + \frac{e}{2}\cdot\left(\frac{d\,\zeta}{d\,r}\right)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Führt man nun $d\zeta/dr$ aus der Gl. (1) in diese Gl. (5) ein, so erhält man eine Gleichung, in der als einzige unbekannte Funktion nur S vorkommt:

$$\frac{d}{d\,r}\left[S + \frac{d\,(S\,r)}{d\,r}\right] + \frac{e\,p^2}{8}\cdot\frac{r}{S^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Setzt man hierin $r = a\varrho$, was darauf hinauskommt, daß statt r die dimensionslose Veränderliche ϱ eingeführt wird, so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$\frac{d}{d\,\varrho}\left[S + \frac{d\,(S\,\varrho)}{d\,\varrho}\right] + \frac{e\,p\,a^2}{8}\cdot\frac{\varrho}{S^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Führt man hierin noch eine »Spannungsfunktion« $\Phi = \Phi\,(\varrho)$ ein gemäß der Gleichung

$$S\cdot\varrho = {}^1/_2\,\sqrt[3]{e\,p\,a^2}\cdot\Phi\,, \qquad S = {}^1/_2\,\sqrt[3]{e\,p\,a^2}\cdot\Phi/\varrho \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

so ist zunächst nach Gl. (2):

$$S_1 = \frac{d\,(S\,r)}{d\,r} = \frac{d\,(S\,\varrho)}{d\,\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und die Gl. (7) geht in die folgende über:

$$\frac{d}{d\,\varrho}\left[\frac{d\,\Phi}{d\,\varrho} + \frac{\Phi}{\varrho}\right] + \frac{\varrho^3}{\Phi^2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \Phi^2\cdot\frac{d}{d\,\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\,(\Phi\,\varrho)}{d\,\varrho}\right] + \varrho^3 = 0 \quad \ldots \quad (10).$$

Zur Auffindung der Lösung dieser Gleichung wird Φ in Form einer Potenzreihe angesetzt:

$$\Phi = A_1\,\varrho + A_3\,\varrho^3 + A_5\,\varrho^5 + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

deren Koeffizienten durch Vergleichung gleichhoher Potenzen ermittelt werden können. Man erhält unmittelbar:

$$A_3 = -\frac{1}{8\,A_1^{\,2}}, \qquad A_5 = -\frac{1}{96\,A_1^{\,5}}, \qquad A_7 = -\frac{13}{9216\,A_1^{\,8}}, \ldots \text{ usw.}$$

Daher ist

$$S = {}^1/_2\,\sqrt[3]{e\,p\,a^2}\left[A_1 - \frac{\varrho^2}{8\,A_1^{\,2}} - \frac{\varrho^4}{96\,A_1^{\,5}} - \frac{13\,\varrho^6}{9216\,A_1^{\,7}} - \ldots\right] \quad \ldots \quad (12)$$

und weiter

$$S_1 = \frac{d\,(S\,r)}{d\,r} = \frac{d\,(S\,\varrho)}{d\,\varrho} = {}^1/_2\,\sqrt[3]{e\,p\,a^2}\cdot\left[A_1 - \frac{3\,\varrho^2}{8\,A_1^{\,2}} - \frac{5\,\varrho^4}{96\,A_1^{\,5}} - \ldots\right] \quad \ldots \quad (13)$$

durch Verwendung dieses Wertes ergibt sich nach Gl. (1):

$$\frac{d\,\zeta}{d\,\varrho} = -\frac{p}{2}\,\frac{a^2\,\varrho}{S} = -\sqrt[3]{\frac{p}{e\,a^2}}\cdot\frac{a^2}{A_1}\cdot\frac{\varrho}{1 - \frac{1}{8\,A_1^{\,3}}\,\varrho^2 - \frac{1}{96\,A_1^{\,6}}\,\varrho^4 - \ldots}$$

$$= -a\,\sqrt[3]{\frac{p\,a^2}{e}}\cdot\frac{1}{A_1}\cdot\left[\varrho + \frac{\varrho^3}{8\,A_1^{\,3}} + \frac{5\,\varrho^5}{196\,A_1^{\,6}} + \ldots\right].$$

Die **Durchbiegung** ergibt sich daraus durch eine Quadratur, und zwar ist, wenn die Integrationskonstante $= f$, das ist gleich der Durchsenkung der Plattenmitte $(r = \varrho = 0)$ gesetzt wird:

$$\zeta = f - a\,\sqrt[3]{\frac{p\,a^2}{e}}\cdot\frac{1}{A_1}\left[\frac{\varrho^2}{2} + \frac{\varrho^4}{32\,A_1^{\,3}} + \frac{5\,\varrho^6}{1152\,A_1^{\,6}} + \ldots\right] \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

Da die Reihe in der vorhergehenden Gleichung absolut konvergent ist, so ist die gliedweise Integration sicher zulässig.

Der bisher noch unbestimmte Wert von A_1 ergibt sich aus der Bedingung, daß der Rand der Platte festgehalten wird, also die Ringdehnung $\varepsilon_1 = u/r$ für $r = a$ verschwindet. Nach Gl. (4) bedeutet dies:

$$S_1 - 1/m\, S = 0\,, \qquad (\text{für } r = a,\ \varrho = 1).$$

Durch Einführung der oben gefundenen Werte von S und S_1 ergibt sich für A_1 die Bestimmungsgleichung:

$$\left[A_1 - \frac{3}{8\,A_1^2} - \frac{5}{96\,A_1^5} - \ldots\right] - \frac{1}{m}\left[A_1 - \frac{1}{8\,A_1^2} - \frac{1}{96\,A_1^5} - \ldots\right] = 0$$

oder

$$A_1\,(1 - 1/m) - \frac{1}{8\,A_1^2}(3 - 1/m) - \frac{1}{96\,A_1^5}(5 - 1/m) = 0$$

und mit $m = {}^{10}/_3$:

$$7\,A_1 - \frac{27}{8\,A_1^2} - \frac{47}{96\,A_1^5} - \ldots = 0.$$

Daraus folgt bis auf 3 Dezimalen genau:

$$A_1 = 0{,}846.$$

Mit Benutzung dieses Ergebnisses erhält man für Spannungen am Rande und in der Mitte die folgenden Werte:

$$(\text{Rand } r = a,\ \varrho = 1)\colon\quad S = 0{,}328\sqrt[3]{e\,p^2\,a^2}\,,\qquad S_1 = 0{,}096\sqrt[3]{e\,p^2\,a^2}$$

$$(\text{Mitte } r = \varrho = 0)\colon\qquad S = S_1 = 0{,}423\sqrt[3]{e\,p^2\,a^2}.$$

Die Konstante f wird durch Benutzung der Bedingung bestimmt, daß die Durchbiegung ζ am Rande ($\varrho = 1$) verschwindet. Man erhält:

$$f = 0{,}664\,a\sqrt[3]{\frac{p\,a^2}{e}}.$$

Die Verschiebung u ist schließlich durch die Gl. (4) bestimmt, sie verschwindet am Rande und in der Mitte der Platte.

II. Dünne Zylinderwand mit Grundflächen gegebener Größe.

1. Der Ansatz. Der Zylindermantel vom Halbmesser a und der Länge $2\,l$ ist zwischen zwei unausdehnbaren Ringen oder Kreisscheiben ausgespannt, die entweder (1.) frei gelagert angenommen werden können, so daß sich ihr Abstand verändern kann oder (2.) festgehalten werden. Im ersten Falle treten keine Auflagerdrücke an den Endflächen auf, und jede Zylinderhälfte ist unter den Spannungen am abgeschnittenen Rande und dem Innendruck auf die betreffende Hälfte im Gleichgewichte; der zweite Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß die Verschiebung der Zylinderenden verschwindet. Um die Anpassung der Form des unter Innendruck (p) gesetzten Behälters an diese Randbedingungen zu bewirken, hat man wie bei der Kreisplatte (I) zwei Paare von Gleichungen zur Verfügung, und zwar ist es in diesem Falle praktisch, für die stereostatischen Gleichungen die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Normalen zur durchgebogenen Wand zu nehmen, nämlich:

$$S_1/R_1 - S/R = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

in der R_1- und R die zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser bedeuten, und als zweite wieder die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Tangente:

$$S_1 = \frac{d\,(S\,r)}{d\,r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Als elastostatische Gleichung erhält man auf Grund des Hookeschen Gesetzes die beiden folgenden, in denen nur Formänderungsgrößen 1. Ordnung berücksichtigt sind:

$$\varepsilon = \frac{d\,\zeta}{d\,z} = \frac{1}{e}\cdot\left(S - \frac{1}{m}\cdot S_1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{r-a}{a} = \frac{1}{e}\cdot\left(S_1 - \frac{1}{m}\cdot S\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

2. Zur **Auflösung dieser Gleichung** erhält man zunächst aus Gl. (4) mit Berücksichtigung von (2):

$$e\,\varepsilon_1 = e\cdot\frac{r-a}{a} = S_1 - \frac{1}{m}\cdot S = \frac{d\,(S\,r)}{d\,r} - \frac{1}{m}\cdot S = r\,\frac{d\,S}{d\,r} + \frac{m-1}{m}\,S,$$

oder

$$\frac{d\,S}{d\,r} + \frac{m-1}{m}\cdot\frac{S}{r} = e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung lautet, wenn C eine Integrationskonstante bedeutet:

$$S = \frac{C}{r^{1-1/m}} + e\left(\frac{m}{2\,m-1}\cdot\frac{r}{a} - \frac{m}{m-1}\right) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

und damit nach Gl. (2):

$$S_1 = \frac{d\,(S\,r)}{d\,r} = \frac{C}{m}\cdot\frac{1}{r^{1-1/m}} + e\left(\frac{2\,m}{2\,m-1}\cdot\frac{r}{a} - \frac{m}{m-1}\right) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Die vollständige Bestimmung der Spannungen kommt demnach einzig und allein auf die Ermittlung der Konstanten C hinaus; diese Ermittlung ist jedoch nur auf dem Wege über die Formänderung des gedehnten Behälters möglich. Die Lösung der Differenzialgleichung, zu der man geführt wird, ist außerordentlich schwierig; man kann aber die Rechnung durch eine Annäherung ersetzen, die durch Linearisierung der erhaltenen Differenzialgleichung entsteht. Setzt man zunächst in den eben erhaltenen Gln. (6) und (7):

$$r = a + u,$$

betrachtet man u als klein gegen a und behält nur die Glieder 1. Ordnung bei, so erhält man:

$$S = \left[\frac{C}{a^{1-1/m}} - \frac{m^2\,e}{(2\,m-1)\,(m-1)}\right]\left(1 - \frac{m-1}{m}\cdot\frac{u}{a}\right) \qquad (8),$$

$$S_1 = \left[\frac{C}{m\,a^{1-1/m}} - \frac{m\,e}{(2\,m-1)\,(m-1)}\right] - \left[\frac{m-1}{m^2}\cdot\frac{C}{a^{1-1/m}} - \frac{2\,m\,e}{2\,m-1}\right]\frac{u}{a} \qquad (9).$$

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$\frac{C}{a^{1-1/m}} - \frac{m^2\,e}{(2\,m-1)\,(m-1)} = c,$$

so können die vorhergehenden Gleichungen auch in der einfacheren Form geschrieben werden:

$$S = c\left(1 - \frac{m-1}{m}\cdot\frac{u}{a}\right) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10),$$

$$S_1 = (c/m^2 + e\cdot u/a) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

Zur Bestimmung der Form des gedehnten Behälters dient nun die Gl. (1), in der nach Abb. 2 zu setzen ist:

$$1/R_1 \sim 1/r \sim 1/a\,(1 - u/a), \qquad 1/R \sim r'' \sim u'',$$

wenn die Striche Ableitungen nach z bedeuten.

Durch Abstreifung aller Glieder von höherer als 1. Ordnung in u erhält man daraus für u die Differenzialgleichung 2. Ordnung:

$$u'' - \varkappa^2\cdot u = -\left(\frac{p}{c} - \frac{1}{a\,m^2}\right) \quad . \quad (12),$$

worin $\varkappa^2$ als Abkürzung für den Ausdruck dient:

$$\varkappa^2 = 1/a^2\,(e/c - 1/m^2).$$

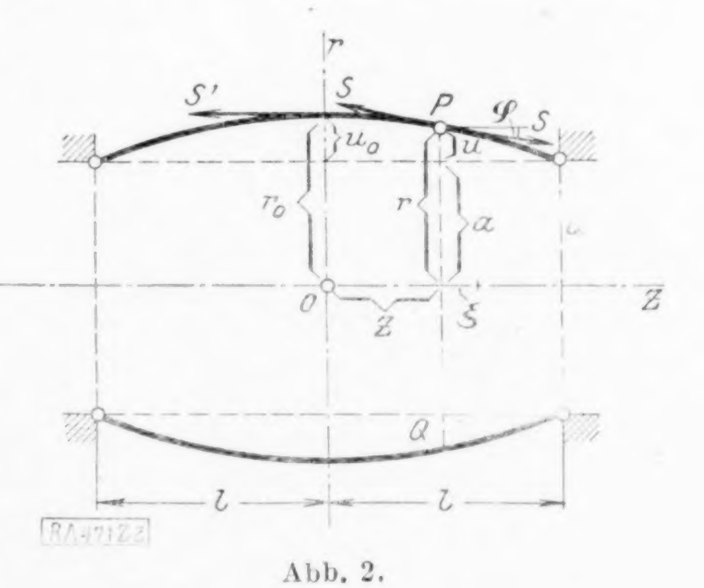


Abb. 2.

Die Lösung dieser Differenzialgleichung (12) lautet für $\varkappa^2 > 0$, wenn A und B zwei willkürliche Integrationskonstanten bedeuten:

$$u = a\,\frac{a\,p\,m^2 - c}{e\,m^2 - c} + A\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa z + B\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa z.$$

Wenn die Endflächen festen Durchmesser haben sollen, d. h. für

$$z = \pm\,l : u = 0$$

sein soll, so folgt:

$$B = 0, \quad A = -\,a\cdot\frac{a\,p\,m^2 - c}{e\,m^2 - c}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\varkappa\,l}$$

und die Form der Meridiankurve des durchgebogenen Behälters ist durch die Gleichung gegeben:

$$u = \frac{a\,p\,m^2 - c}{e\,m^2 - c}\left[1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\varkappa z}{\mathfrak{Cof}\,\varkappa l}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13),$$

sie ist also ähnlich der gemeinen Kettenlinie. (Auch für $\varkappa^2 < 0$ und $\varkappa^2 = 0$ läßt sich die Lösung leicht angeben.)

In dieser Gleichung kommt noch die Konstante c vor, die von C linear abhängt und bisher unbestimmt geblieben ist. Um ihren Wert zu erhalten — wozu nach dem oben Gesagten den Randbedingungen gemäß vorzugehen ist —, ist es praktisch, in allen verwendeten Gleichungen statt c die Ausbiegung u_0 der Zylindermitte einzuführen.

Für den oben zuerst genannten Fall frei verschieblicher Zylinderenden, wie er etwa für einen in der Längsrichtung verschieblich eingemauerten Kessel verwirklicht ist, ergibt sich die Beziehung zwischen c und u_0 am einfachsten aus der Bedingung des Gleichgewichts für jede der beiden durch die Ebene $z = 0$ getrennten Zylinderhälften. Die Meridianspannung S' längs dieser Ebene ist durch die Gleichung gegeben:

$$2\,(a + u_0)\,\pi \cdot S' = (a + u_0)^2\,\pi \cdot p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

und nach Gl. (10) für $u = u_0$:

$$S' = \frac{(a + u_0)\,p}{2} = c\left(1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{u_0}{a}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Es ist also

$$c = \frac{a\,p}{2} \cdot \frac{1 + u_0/a}{1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{u_0}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

und

$$\varkappa = 1/a\,\{e/c - 1/m^2\}^{1/2} = 1/a\left\{\frac{2\,e}{a\,p}\,\frac{1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{u_0}{a}}{1 + u_0/a} - \frac{1}{m^2}\right\}^{1/2}.$$

Ferner ist nach Gl. (13) für $z = 0$: $u = u_0$, d. h.

$$u_0 = a\,\frac{a\,p\,m^2 - c}{e\,m^2 - c}\left[1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\varkappa l}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Nach Einsetzung der eben für c und $\varkappa$ gefundenen Ausdrücke und Auflösung nach $\mathfrak{Cof}\,\varkappa l$ ergibt sich daraus:

$$\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\varkappa l} = 1 - \frac{e\,m^2 - c}{a\,p\,m^2 - c}$$

oder

$$1 - \frac{\frac{2\,e}{a\,p}\,m^2\left(1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{u_0}{a}\right) - \left(1 + \frac{u_0}{a}\right)}{2\,m^2\left(1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{u_0}{a}\right) - \left(1 + \frac{u_0}{a}\right)} \cdot \frac{u_0}{a} = \left[\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{a}\left\{\frac{2\,e}{a\,p} \cdot \frac{1 - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{u_0}{a}}{1 + \frac{u_0}{a}} - \frac{1}{m^2}\right\}^{1/2}\right]^{-1} \quad (18).$$

Aus dieser Gleichung erhält man einen angenäherten Wert für u_0 durch abermalige Linearisierung. Betrachtet man wieder u_0 als kleine Größe, entwickelt zunächst die Quadratwurzel in der Funktion $\mathfrak{Cof}\,\varkappa l$ und benutzt die bekannte Formel für den $\mathfrak{Cof}$ der Summe zweier Größen, so erhält man:

$$\mathfrak{Cof}\,\varkappa l \sim \mathfrak{Cof}\left[l/a\,\sqrt{\frac{2\,e}{a\,p} - \frac{1}{m^2}}\left\{1 - \frac{m\,(2\,m-1)\,e}{2\,e\,m^2 - a\,p} \cdot \frac{u_0}{a}\right\}\right]$$

$$= \mathfrak{Cof}\left\{l/a\,\sqrt{\frac{2\,e}{a\,p} - \frac{1}{m^2}}\right\} \cdot \left[1 - \frac{l}{a} \cdot \frac{(2\,m-1)\,e}{\sqrt{a\,p\,(2\,e\,m^2 - a\,p)}} \cdot \frac{u_0}{a} \cdot \mathfrak{Tg}\,\frac{l}{a}\sqrt{\frac{2\,e}{a\,p} - \frac{1}{m^2}}\right].$$

Damit wird die Gl. (16):

$$1 - \frac{m^2 \cdot \frac{2\,e}{a\,p} - 1}{2\,m^2 - 1} \cdot \frac{u_0}{a} = \frac{1 + \frac{l}{a}\,\frac{(2\,m-1)\,e}{\sqrt{a\,p\,(2\,e\,m^2 - a\,p)}} \cdot \frac{u_0}{a} \cdot \mathfrak{Tg}\left\{\frac{l}{a}\sqrt{\frac{2\,e}{a\,p} - \frac{1}{m^2}}\right\}}{\mathfrak{Cof}\left\{\frac{l}{a}\sqrt{\frac{2\,e}{a\,p} - \frac{1}{m^2}}\right\}}$$

und durch Auflösung ergibt sich daraus, wenn noch zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{2\,e\,m^2 - a\,p}{a\,p\,m^2}} = n$$

gesetzt wird:

$$\frac{u_0}{a} = \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{l n}{a}\right) - 1}{\frac{l}{a}\frac{(2m-1)e}{m n a p}\cdot \mathfrak{Tg}\left(\frac{l n}{a}\right) + \frac{m^2 n^2}{2m^2-1}\cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{l n}{a}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Man kann übrigens die Vereinfachung der Gl. (17) noch weiter treiben, wenn man beachtet, daß bei einigermaßen erheblichen Werten von l/a und e/ap die rechte Seite dieser Gleichung sehr klein ausfällt. Setzt man sie angenähert gleich Null, so erhält man nach Vernachlässigung der in u_0 quadratischen Glieder auf der linken Seite der Gl. (18) und nach Auflösung den angenäherten Ausdruck

$$\frac{v_0}{a} = \frac{2m^2-1}{2m^2\cdot e/ap - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

der von l ganz unabhängig geworden ist.

Die Auflösung der Gl. (17) kann übrigens auch in bekannter Weise auf zeichnerischem Wege gegeben werden, sobald $\frac{2e}{ap}$ und l/a irgendwelche Werte vorgegeben wurden. Der Vorgang ist der, daß die Funktion links und rechts vom Gleichheitszeichen in Gl. (17) für eine Anzahl von Werten u_0/a ausgerechnet und in einem Achsenkreuz als Kurven aufgetragen werden, ihr Schnittpunkt (im allgemeinen kommt nur ein einziger in Betracht) gibt sodann den gesuchten Wert von u_0/a. Bei kleinen Durchbiegungen dürfte indessen in der Regel die Berechnung von u_0 nach Gl. (19) ausreichen, wie auch durch die unten folgenden Zahlenbeispiele erläutert werden möge. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung ist $\varkappa^2 > 0$, $u_0 > 0$, d. h. $2em^2 - ap > 0$; wie schon oben hervorgehoben, sind aber auch in den Fällen $2em^2 - ap < 0$ oder $2em^2 - ap = 0$ die Lösungen ohne Schwierigkeit in ähnlicher Weise angebbar.

Die Dehnung in Richtung der Zylinderachse ergibt sich schließlich durch Integration der Gl. (3)

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{e}\cdot\left(S - \frac{1}{m}S_1\right)$$

mit Benutzung der Gl. (10) und (11) wird diese Gleichung

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{e}\left\{\frac{(m^3-1)c}{m^3} - \left[\frac{m-1}{m}c + \frac{e}{m}\right]\frac{u}{a}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert von u nach Gl. (16) ein und integriert, so folgt aus der Bedingung, daß für $z = 0$ auch $\zeta = 0$ sein muß, das Verschwinden der auftretenden additiven Konstanten und es ergibt sich:

$$\zeta = \frac{1}{e}\left\{\left[\frac{(m^3-1)c}{m^3} - \left(\frac{m-1}{m}c + \frac{e}{m}\right)\frac{apm^2-c}{em^2-c}\right]z + \left(\frac{m-1}{m}c + \frac{e}{m}\right)\frac{apm^2-c}{em^2-c}\frac{1}{\varkappa}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa z}{\mathfrak{Cof}\,\varkappa l}\right\} \quad (22).$$

Ist die Konstante c bzw. u_0 in der oben dargelegten Weise bestimmt worden, so ergibt sich die Verschiebung u an jeder Stelle z durch die Gl. (16) und die Spannungen S und S_1 durch die Gl. (10) und (11). Der größte Wert der Spannung, die überhaupt auftritt, ist die Ringspannung S_1 in der Mitte des Zylinders, und zwar ist dieser etwa doppelt so groß wie die Meridianspannung am Rande. — Nach der üblichen elementaren Berechnungsweise ergibt sich bekanntlich genau $S_1 = ap$ und $S = ap/2$, unabhängig von z. —

3. Beispiele. Die bisher erhaltenen Ergebnisse sollen nun zunächst durch zwei Zahlenbeispiele erläutert werden.

Eine zylindrische Haut aus mäßig festem Gummi entsprechend $E = 100$ kg/m², $m = {}^{10}/_3$ der Dicke $h = 0{,}2$ cm, dem Durchmesser $a = 20$ cm und der Länge $2l = 80$ cm werde mit dem Ueberdruck $p = 0{,}1$ kg/cm² belastet.

Den angegebenen Zahlenwerten entspricht:

$$e = Eh = 100\cdot 0{,}2 = 20 \text{ kg/cm},$$

daher

$$\frac{e}{ap} = 10 \quad \text{(dimensionslos)}.$$

Nach der Näherungsformel (20) ergibt sich

$$u_0/a = 0{,}096\,, \qquad u_0 = 1{,}92 \text{ cm}.$$

Durch zeichnerische Ermittlung der Wurzel u_0 der Gl. (17) ergibt sich $u_0 = 1{,}9$, als nahezu derselbe Wert. (Der Einfluß der Länge l würde erst bei kleinen Werten von $l/$ merklich werden.)

Mit diesen Werten ergibt sich nach Gl. (16)

$$c = 1{,}175 \text{ kg/cm}$$

und damit nach den Gl. (10) und (11) die Spannungen in der Mitte des Zylinders ($u = u_0$):

$$S' = 1{,}096 \text{ kg/cm}, \qquad S_1' = 2{,}026 \text{ kg/cm}$$

und die Spannungen am Rande ($u = 0$):

$$S'' = 1{,}175 \text{ kg/cm}, \qquad S_1'' = 0{,}106 \text{ kg/cm}.$$

Andererseits mögen für einen Kessel aus dünnem Stahlblech die folgenden Annahmen gelten:

$$E = 2{,}15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \qquad m = {}^{10}/_3, \qquad h = 1{,}5 \text{ cm},$$

mithin

$$e = E\,h = 3{,}22 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}.$$

Ferner

$$a = 100 \text{ cm}, \qquad l = 200 \text{ cm}, \qquad p = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

Da

$$\frac{e}{a\,p} = 1{,}61 \cdot 10^3,$$

so folgt nach der Näherungsformel (20):

$$u_0 = 0{,}0594 \text{ cm}.$$

Rechnet man damit den Wert von c nach Gl. (16) so folgt

$$c = 1000 \text{ kg/cm}$$

und nach den Gl. (10) und (11) für die Spannungen in der Zylindermitte ($u = u_0$):

$$S' = 1000 \text{ kg/cm}, \qquad S_1' = 2000 \text{ kg/cm}$$

und am Rande ($u = 0$):

$$S'' = 1000 \text{ kg/cm}, \qquad S_1'' = 90 \text{ kg/cm}.$$

In diesem Falle würde die Beanspruchung durch S_1' die Größe

$$\sigma = S_1'/h = 1332 \text{ kg/cm}^2$$

betragen, würde also die für Stahlblech zulässige Grenze von $k_z = 1200$ kg/cm² überschreiten.

4. Berechnung der Blechstärke. Wir wollen nun noch anfügen, in welcher Weise die erhaltenen Gleichungen zur Berechnung der Blechstärke h bei gegebenem k_z und gegebenen Werten für die Abmessungen des Zylinders und des Ueberdruckes p verwertet werden können. Wie aus den obigen Beispielen hervorgeht, ist es die Ringspannung in der Zylindermitte, die den größten Wert der auftretenden Spannungen überhaupt darstellt, und auf diesen Wert muß daher die Rechnung bezogen werden. Setzt man daher

$$S_1' = k_z \cdot h,$$

so gibt die Gl. (10) für $u = u_0$:

$$S_1' = c/m^2 + e\,u_0/a$$

darin ist nach Gl. (20) und Gl. (16), da $e = E \cdot h$:

$$\frac{u_0}{a} = \frac{2\,m^2 - 1}{2\,m^2 \cdot \dfrac{E\,h}{a\,p} - 1}, \qquad c = \frac{a\,p}{2} \cdot \frac{1 + u_0/a}{1 - \dfrac{m-1}{m} \cdot \dfrac{u_0}{a}}.$$

Führt man alle diese Ausdrücke in die Gleichung für S_1' ein, so folgt als Bestimmungsgleichung für die unbekannte Blechstärke h nach Division durch ap:

$$\frac{S_1'}{a\,p} = \frac{k_z}{a\,p} \cdot h = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{m^2 \dfrac{E\,h}{a\,p} + m^2 - 1}{2\,m^2 \dfrac{E\,h}{a\,p} - \dfrac{(m-1)(2\,m^2 - 1)}{m} - 1} + \frac{\dfrac{E\,h}{a\,p}(2\,m^2 - 1)}{2\,m^2 \dfrac{E\,h}{a\,p} - 1} \quad . \quad . \quad (23).$$

Für große Werte von $\dfrac{E\,h}{a\,p}$ überwiegt auf der rechten Seite das zweite Glied und hat den Wert 1; in der Grenze liefert daher diese Formel den bekannten Näherungswert entsprechend $S_1 = a\,p$:

$$h = \frac{a\,p}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Mit Hilfe dieses Näherungswertes ist es leicht, aus der in h kubischen Gl. (23) für die Blechstärke h den richtigen Wert von h mit beliebiger Genauigkeit auszurechnen.

Für das vorhergehende Beispiel würde mit $k_z = 1200$ kg/cm² der Wert für h nahezu betragen

$$h = 1,67 \text{ cm}$$

und dieses ist auch der Wert, der durch die Näherungsformel (24) geliefert wird.

Die obige Rechnung zeigt, daß die Abnahme der Ringspannung gegen die Enden zu durch die angenommenen unausdehnbaren Ringe an den Endflächen sehr bedeutend ist; als derartige Ringe müssen auch — wenigstens bis zu einem gewissen Grade — die Ueberlappungen und Umbördelungen der Kesselböden, die mit den zylindrischen Wänden vernietet werden, angesehen werden.

5. Für **festgehaltene Endflächen** läßt sich die Bedingung (14) nicht ansetzen, vielmehr ergibt sich die Bestimmung der Konstanten c durch Ausrechnung von u und ζ bei unbestimmt gelassenem c und Verwertung der Bedingung

$$z = \pm l : \zeta = 0.$$

Der Rechnungsgang und die wirkliche Ermittlung der fraglichen Größen geschieht ganz auf die gleiche Art wie zuvor.

6. Sehr dünne Zylinderwand. Die Berücksichtigung der quadratischen Glieder in den Verzerrungsgrößen ε und ε_1 ist hier etwas einfacher wie bei der Kreisplatte, weil sich ihr Einfluß nur in dem Ausdruck für ε geltend macht und auf diese Gleichung erst bei Berechnung von ζ Rücksicht genommen werden muß, so daß von den Gl. (3) und (4) nur die erste erweitert werden muß, während die zweite unverändert bleiben kann:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d\xi}{dz} + {}^1/_2 \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{1}{e}\left(S - \frac{1}{m} S_1\right) \\ \varepsilon_1 &= \frac{r-a}{a} \qquad\qquad\quad = \frac{1}{e}\left(S_1 - \frac{1}{m} S\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Die Berechnung von S, S_1 und $u = r - a$ erfolgt genau so wie früher; die dabei gewonnenen Ausdrücke sind in die erste dieser beiden Gleichungen einzuführen. Es erweist sich dabei unmittelbar, daß der Einfluß der quadratischen Glieder in diesem Falle nur eine ziemlich bedeutungslose Korrektion ausmacht, die ohne wesentlichen Fehler auch ganz außer acht gelassen werden kann. 471

Drillung und Drillungsschwingungen von Scheiben.

Von **R. GRAMMEL** in Stuttgart.

Unter Drillung soll bei einer axialsymmetrischen Scheibe diejenige Verformung durch Schubspannungen verstanden sein, bei der die äußeren Ringfasern der Scheibe sich gegen die inneren so verdreht haben (Abb. 1), daß jede ursprünglich radiale Gerade g (Abb. 2) sich als mehr oder weniger spiralige Kurve k um die Scheibenachse windet. Eine derartige Verformung kommt beispielsweise bei Dampfturbinenscheiben vor, die auf ihrer Welle aufgeschrumpft sitzen und vom Umfange aus ein Drehmoment auf die Welle zu übertragen haben. Sowohl die Verformungen wie die Beanspruchungen, die sich ohne weiteres angeben lassen (**1.**), sind dabei in der Regel geringfügig. Es scheint aber bisher nicht beachtet worden zu sein, daß die zugehörigen Drillungsschwingungen, deren die Scheibe naturgemäß fähig ist, zu unliebsamen und schwer zu beseitigenden Resonanzerschei-

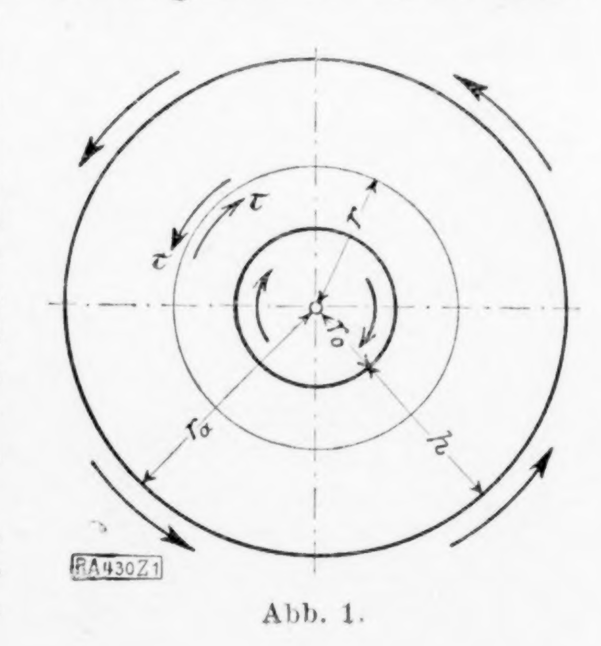


Abb. 1.

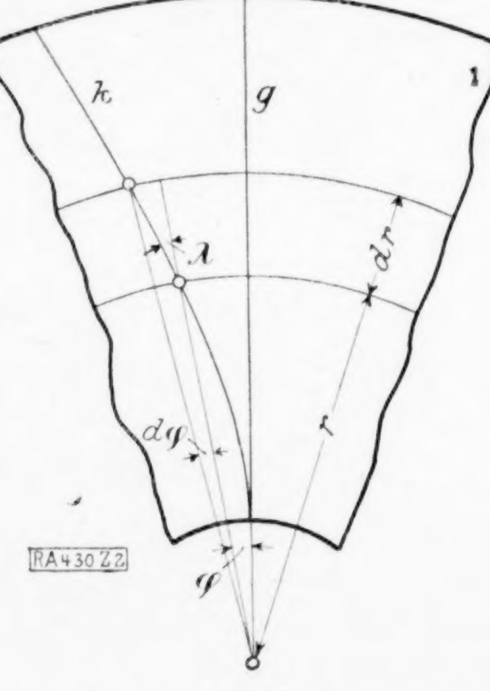


Abb. 2.

nungen führen können. Zu ihrer Vermeidung ist die Kenntnis der Eigenfrequenzen erforderlich, deren Berechnung für Scheibenprofile mit einfacher analytischer Darstellung im folgenden erledigt wird (**2.** bis **5.**). Bei beliebigem Profil gelingt die Lösung durch ein graphisches Verfahren (**6.**), das übrigens leicht auch auf die Behandlung anderer eindimensionaler Randwertaufgaben übertragen und zur Ermittelung der zugehörigen Eigenwerte verwendet werden kann.

1. Scheibendrillung. Es sei eine axialsymmetrische Scheibe vom Schubmodul G vorgelegt; sie sei innen durch einen zu ihr koaxialen Zylinder vom Halbmesser r_0, außen durch einen ebensolchen vom Halbmesser r_a begrenzt. Ihre Dicke $y = f(r)$ soll so klein sein, daß man mit der auch sonst in der Scheibentheorie bewährten Näherung rechnen darf, wonach Spannungen in axialer Richtung allenthalben außer acht bleiben und Spannungen senkrecht zur Scheibenachse als nur vom zugehörigen Achsenabstand r abhängig gelten. Eine äquatoriale Symmetrieebene mag vorhanden sein; es genügt aber auch schon, daß sich die Scheibenmasse um eine Art Mittelebene einigermaßen symmetrisch verteilt. Die Scheibe empfange vom Außenzylinder gleichmäßig ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ und habe dieses ebenso auf den Innenzylinder zu übertragen oder umgekehrt.

Die Beanspruchung der Scheibe besteht in reinen Schubspannungen τ längs konzentrischer Zylinderschnitte der Scheibe. Da jeder dieser Schnitte vom Halbmesser r (Abb. 1) das äußere Moment $\mathfrak{M}$ aufnehmen muß, so gilt

$$2\pi\tau r^2 y = \mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Hiernach nimmt beispielsweise in der Scheibe von unveränderlicher Dicke die Spannung von außen nach innen zu gemäß dem Gesetz

$$\tau = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi y}\frac{1}{r^2},$$

wogegen eine Scheibe mit überall gleicher Schubspannung das hyperbolische Profil

$$y = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\tau}\frac{1}{r^2}$$

besitzen muß.

Ferner berechnet sich im Hinblick auf Abb. 2 die Schiebung λ (d. h. die Aenderung des ursprünglich rechten Winkels zwischen einem in der Symmetrieebene der Scheibe liegenden Kreise r und derjenigen Kurve k, in die eine ursprünglich radiale Gerade g in dieser Ebene infolge der Verformung übergegangen ist) wie folgt

$$\lambda = \frac{(r+dr)\,d\varphi}{dr} = r\frac{d\varphi}{dr}.$$

Da aber andererseits auch $\lambda = \tau/G$ ist, so wird

$$d\varphi = \frac{\tau\,dr}{G\,r},$$

und hieraus ergibt sich wegen (1) der Drillungswinkel

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi G}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^3 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Beispielsweise findet man für die Scheibe von unveränderlicher Dicke die Verdrillung des Außenrandes gegen den Innenrand

$$\varphi_a = \frac{\mathfrak{M}}{4\pi G y}\frac{r_a^2 - r_0^2}{r_a^2 r_0^2}$$

und für die Scheibe mit überall gleichen Schubspannungen

$$\varphi_a = \frac{\tau}{G}\ln\frac{r_a}{r_0}.$$

2. Drillungsschwingungen. Denkt man sich durch einen zur Scheibe koaxialen Zylinder vom Halbmesser r und einen ebensolchen vom Halbmesser $r+dr$ ein ringförmiges Element der Scheibe herausgeschnitten, so ist dessen Trägheitsmoment in bezug auf die Scheibenachse gleich $2\pi\varrho r^3 y\,dr$, wo ϱ die Massendichte bedeutet. Ist dieses Ringelement gegen seine Ruhelage um den Winkel φ verdrillt, so greift an seiner Innenbegrenzung infolge der Schubspannungen τ ein im Sinne abnehmender φ drehendes Moment $2\pi\tau r^2 y$ an, an seiner Außenbegrenzung ein im Sinne zunehmender φ drehendes

Moment $2\pi\left[\tau r^2 y + \frac{\partial(\tau r^2 y)}{\partial r} dr\right]$, also im ganzen ein im Sinne zunehmender φ positives Moment $2\pi \frac{\partial(\tau r^2 y)}{\partial r} dr$; und demnach folgt die Drehschwingung des Ringelementes um die Scheibenachse dem Gesetze

$$\varrho r^3 y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial(\tau r^2 y)}{\partial r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Dabei ist aber wieder

$$\tau = G\lambda = G r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

und mithin kommt statt (3)

$$\varrho r^3 y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 y \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (5).$$

Resonanzgefahr besteht lediglich für stehende Schwingungen, d. h. für Lösungen von der Form

$$\varphi = R \cdot T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6),$$

wo R eine Funktion von r allein, T eine solche von t allein ist. Setzt man (6) in (5) ein, so kommt

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = \frac{G}{\varrho} \frac{\frac{d}{dr}\left(r^3 y \frac{dR}{dr}\right)}{r^3 y R} \quad \ldots \ldots \ldots (7),$$

und da hier rechts eine Funktion von r allein, links eine solche von t allein steht, so muß jede der beiden Seiten einem und demselben Festwerte gleich sein, den wir etwa mit $-\frac{\varkappa^2}{h^2} \frac{G}{\varrho}$ bezeichnen wollen, indem wir unter $\varkappa$ eine noch zu bestimmende dimensionslose Zahl und unter $h = r_a - r_0$ die Scheibenbreite (vergl. Abb. 1) verstehen. Hiernach zerspaltet sich die Gleichung (7) in die zwei Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dr}\left(r^3 y \frac{dR}{dr}\right) + \frac{\varkappa^2}{h^2} r^3 y R = 0 \quad \ldots (8), \qquad \frac{d^2 T}{d t^2} + \frac{\varkappa^2}{h^2} \frac{G}{\varrho} T = 0 \quad \ldots \ldots (9).$$

Die Gleichung (9) besagt im wesentlichen, daß die Eigenfrequenz der Scheibe den Wert

$$\varepsilon = \frac{\varkappa}{h} \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

besitzt. Dieser ist bekannt, sobald man $\varkappa$ so berechnet hat, daß die Randbedingungen sich für eine nicht identisch verschwindende Lösung von (8) erfüllen lassen. Diese Rechnung möge zunächst für einige besondere Scheibenprofile durchgeführt werden.

3. Erstes Sonderprofil. Für die im Dampfturbinenbau üblichen, gegen den Außenrand hin sich stark verjüngenden Scheiben läßt sich das Profil oft genähert in der Gestalt

$$r^3 y = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

darstellen. Das allgemeine Integral von (8) lautet dann

$$R = A \cos \frac{\varkappa r}{h} + B \sin \frac{\varkappa r}{h} \quad \ldots \ldots \ldots (12).$$

Wir behandeln folgende Arten von Randbedingungen:

I. Innenrand r_0 fest, Außenrand r_a frei.
II. Beide Ränder fest.
III. Beide Ränder frei.
IV. Innenrand auf dem freien Ende einer am anderen Ende fest eingespannten elastischen Welle von vernachlässigbarer Masse und der Länge l sitzend, Außenrand frei.
V. Innenrand auf dem einen Ende einer ebensolchen elastischen Welle sitzend, deren anderes Ende eine starre Masse trägt, Außenrand frei.

Von diesen fünf Fällen, denen man, ohne daß neue grundsätzliche Schwierigkeiten aufträten, weitere hinzufügen könnte, haben die drei ersten besonders einfache Lösungen der Randwertaufgabe; die beiden letzten entsprechen mehr den tatsächlichen Verhältnissen beispielsweise der Dampfturbinen.

Für die Fälle I bis III ist zu beachten, daß an einem festen Rande mit $\varphi = 0$ gemäß (6) auch $R = 0$ bleibt, wogegen an einem freien Rande $\tau = 0$, also nach (4) und (6) $dR/dr = 0$ sein muß. Ist ferner im Falle IV der von einem Drehmoment eins erzeugte Drillungswinkel der elastischen Welle mit der positiven Zahl β bezeichnet, so lautet die Bedingung für den Innenrand der Scheibe (als Ausdruck der Tatsache, daß die dortigen Spannungen das Torsionsmoment der Welle erzeugen)

$$2\pi r_0^2 y_0 \tau = \frac{\varphi_0}{\beta},$$

und dafür kann man nach (4) und (6) auch schreiben

$$R_0 = a h \left(\frac{dR}{dr}\right)_0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (13)$$

mit der — durch Hinzufügung von h wieder dimensionslos gemachten — Zahl

$$a = \frac{2\pi\beta r_0^3 y_0 G}{h} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (14).$$

Der Fall V endlich ist dadurch gekennzeichnet, daß ein Schwingungsknoten auf der elastischen Welle in einem zunächst noch unbekannten Abstande x von der Scheibenmitte vorhanden ist. Infolgedessen muß statt (13) gelten

$$R_0 = \frac{x}{l} a h \left(\frac{dR}{dr}\right)_0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (15).$$

Die an dem anderen Wellenende sitzende Masse vom Trägheitsmoment Θ macht Schwingungen, deren Frequenz gleich $\sqrt{l/(l-x)\beta\Theta}$ ist und mit der Eigenfrequenz ε der Scheibe übereinstimmen muß; also ist zufolge (10)

$$\frac{\varkappa^2}{h^2}\frac{G}{\varrho} = \frac{l}{(l-x)\beta\Theta}.$$

Setzt man den hieraus berechneten Wert von x/l in (15) ein, so nimmt die innere Randbedingung im Falle V die Gestalt an

$$R_0 = a h \left(1 - \frac{b^2}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

mit der dimensionslosen Zahl

$$b^2 = \frac{h^2 \varrho}{\beta G \Theta} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17).$$

Hiernach berechnen sich durch Zusammenfügen der jeweiligen Randbedingungen die Frequenzgleichungen sowie deren Lösungen wie folgt:

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & \cos\varkappa = 0, & \varkappa = (n + 1/2)\pi, \\ \text{II. und III.} & \sin\varkappa = 0, & \varkappa = (n+1)\pi, \\ \text{IV.} & \operatorname{ctg}\varkappa = a\varkappa, & \varkappa = (n + \varepsilon_n)\pi, \\ \text{V.} & \operatorname{ctg}\varkappa = a\dfrac{\varkappa^2 - b^2}{\varkappa}, & \varkappa = (n + \varepsilon_n')\pi. \end{array}$$

Hier ist n irgendeine positive ganze Zahl mit Einschluß von Null, ferner ε_n ein von n und a abhängiger positiver Bruch, der im einzelnen Falle leicht zu berechnen ist und für kleines a gegen $1/2$, für wachsendes a oder für wachsendes n gegen 0 geht, als Ausdruck der Tatsache, daß dann der Fall IV offensichtlich in I bzw. (abgesehen von $n = 0$) in III ausartet. Schließlich ist auch ε_n' ein von n, a und b abhängiger positiver Bruch, der mit wachsendem n oder abnehmendem b gegen ε_n geht und mit wachsendem b sich der Null nähert, als Ausdruck wieder der Tatsache, daß dann der Fall V in IV bzw. in III ausartet.

4. Zweites Sonderprofil. Häufig lassen sich die Profile tatsächlich verwendeter Scheiben näherungsweise durch die Gleichung

$$y = \text{konst.}\,\frac{e^{-\frac{2cr}{h}}}{r^3} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (18)$$

darstellen, wo c eine (in der Regel positive) Konstante bedeutet. Die zugehörige Lösung von (8) ist

$$R = e^{\frac{cr}{h}}\left(A\cos\frac{\mu r}{h} + B\sin\frac{\mu r}{h}\right) \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

mit

$$\mu = \sqrt{\varkappa^2 - c^2} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (20).$$

Es genügt, die Bestimmungsgleichung von μ für die fünf Fälle anzugeben; sie lautet, wenn man die Abkürzungen a und b benutzt,

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{c}, \qquad \text{II. und III.}\quad \sin\mu = 0,$$

$$\text{IV.}\quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\mu}{a(\mu^2+c^2)-c}, \qquad \text{V.}\quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\mu}{a(\mu^2-b^2+c^2)-c}.$$

5. Hyperbolische und parabolische Profile. Eine sehr allgemeine und analytisch ebenfalls noch leicht zu bewältigende Klasse von Profilen wird durch die Gleichung

$$r^m y = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

dargestellt, wo m irgendeine reelle (in der Regel positive) Konstante ist. Die zugehörige Differentialgleichung (8)

$$\frac{d}{dr}\left(r^{3-m}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\varkappa^2}{h^2} r^{3-m} R = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$R = r^{\frac{m}{2}-1}\left[A J_{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{\varkappa r}{h}\right) + B N_{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{\varkappa r}{h}\right)\right] \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Hierbei sind J und N die Besselschen Zylinderfunktionen erster und zweiter Art. Im besonderen ist beispielsweise für

$$m = 0 \ (y = \text{konst.}), \quad R = \frac{1}{r}\left[A J_1\left(\frac{\varkappa r}{h}\right) + B N_1\left(\frac{\varkappa r}{h}\right)\right],$$

$$m = 1 \ (xy = \text{konst.}), \quad R = \frac{1}{r}\left[A \cos\frac{\varkappa r}{h} + B \sin\frac{\varkappa r}{h}\right],$$

$$m = 2 \ (x^2 y = \text{konst.}), \quad R = A J_0\left(\frac{\varkappa r}{h}\right) + B N_0\left(\frac{\varkappa r}{h}\right),$$

$$m = 3 \ (x^3 y = \text{konst.}), \quad R = A \cos\frac{\varkappa r}{h} + B \sin\frac{\varkappa r}{h} \ (\text{vergl. } \mathbf{3.}),$$

$$m = 4 \ (x^4 y = \text{konst.}), \quad R = r\left[A J_1\left(\frac{\varkappa r}{h}\right) + B N_1\left(\frac{\varkappa r}{h}\right)\right]$$

usw. Auch die Bestimmungsgleichungen für $\varkappa$ lassen sich ohne weiteres ausrechnen. Beispielsweise lauten sie im Falle $m = 2$ der Scheibe mit unveränderlicher statischer Beanspruchung (vergl. **1.**), wenn man Ableitungen nach dem Argument durch Striche bezeichnet,

$$\text{II.}\quad J_0\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right)\cdot N_0\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right) - J_0\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right)\cdot N_0\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right) = 0,$$

$$\text{III.}\quad J_0'\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right)\cdot N_0'\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right) - J_0'\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right)\cdot N_0'\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right) = 0,$$

$$\text{V.}\quad J_0\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right)\cdot N_0'\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right) - J_0'\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right)\cdot N_0\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right)$$
$$= a\frac{\varkappa^2-b^2}{\varkappa}\left[J_0'\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right)\cdot N_0'\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right) - J_0'\left(\frac{\varkappa r_a}{h}\right)\cdot N_0'\left(\frac{\varkappa r_0}{h}\right)\right];$$

auch hier geht wieder aus V der Fall IV mit $b = 0$, der Fall I mit $a = b = 0$ hervor. Die zahlenmäßige Lösung der Gleichung II ist bekannt[1]); für die Auflösung der Gleichungen III und V bedient man sich der Tafeln der Zylinderfunktionen.

6. Beliebige Profile. Es möge sich schließlich um ein beliebiges Profil

$$y = f(r) \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

handeln, das vielleicht nur in Gestalt einer gezeichneten Kurve vorliegt. Man verwandelt die Kurve zunächst in eine neue mit den Ordinaten

$$z = r^3 y = r^3 f(r) \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

(Abb. 3) und ersetzt diese durch einen treppenförmigen Polygonzug mit den Mittelordinaten $z_1, z_2, \ldots z_n$, womit die ganze Scheibe in n ringförmige Teilscheiben aufgespalten ist, deren jede der Gleichung (8) in der Gestalt

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\varkappa^2}{h^2} R = 0$$

[1]) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909, S. 162 bis 164.

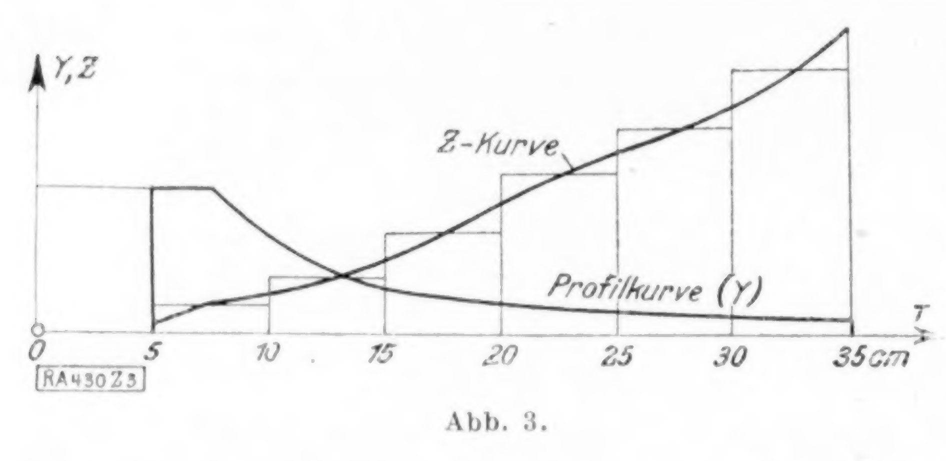


Abb. 3.

gehorcht. Die i-te dieser Teilscheiben, begrenzt durch die Halbmesser r_{i-1} und r_i, besitzt das Integral

$$R = A_i \sin\left(\frac{\varkappa r}{h} + \gamma_i\right) \quad (25),$$

wo A_i und γ_i zwei der i-ten Teilscheibe eigentümliche Beiwerte sind, die von dem Zusammenhang dieser Teilscheibe mit den beiden Nachbarscheiben abhängen. Bezeichnet man mit dem Zeiger $i-0$ bzw. $i+0$ den Wert einer Größe unmittelbar vor bzw. nach dem Uebergang über den Grenzhalbmesser r_i, so lauten die (sogleich zu erklärenden) Bedingungen für diesen Zusammenschluß

$$\varphi_{i-0} = \varphi_{i+0}, \qquad y_{i-0}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{i-0} = y_{i+0}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{i+0} \quad \ldots \ldots \quad (26),$$

wobei natürlich die y jetzt nicht mehr die (in der Regel stetigen) Profilordinaten der wirklichen Scheibe, sondern die (bei r_i unstetigen) Ordinaten der umgewandelt zu denkenden Profile $y = z_i/r^3$ der Teilscheiben sind.

Die erste Gleichung (26) besagt, daß die Schwingungsamplitude bei r_i sprunglos bleibt, die zweite, daß das Drehmoment der inneren Spannung dort keinen Sprung besitzen darf [vergl. (4)]. Beachtet man, daß das Sprungverhältnis

$$q_i = \frac{y_{i-0}}{y_{i+0}} = \frac{z_{i-0}}{z_{i+0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

eine aus der z-Kurve unmittelbar abgreifbare Zahl ist, so kann man an Stelle von (26) schreiben

$$R_{i+0} = R_{i-0}, \qquad \left(\frac{dR}{dr}\right)_{i+0} = q_i\left(\frac{dR}{dr}\right)_{i-0} \quad \ldots \ldots \quad (28),$$

und nun handelt es sich einfach darum, die den einzelnen Teilscheiben eigentümlichen Sinuskurven (25) so zusammenzustoßen, daß dabei jeweils die Bedingungen (28) erfüllt sind, d. h. so, daß die Gesamtkurve zwar stetig ist, aber an der Stelle r_i einen Tangentensprung q_i hat.

Das unbequeme Zeichnen von Sinuskurvenstücken kann vermieden werden, wenn man ein Kreisdiagramm benutzt und beispielsweise im Falle I folgendermaßen verfährt.

Ausgehend von einem schon zum Voraus möglichst gut abgeschätzten Näherungswert von $\varkappa$ (man wird ihn im Falle I ungefähr bei $\pi/2$ oder $3\pi/2$ oder $5\pi/2$ usw. zu suchen haben) schlage man um O (Abb. 4) einen Kreis vom Halbmesser $h = r_a - r_0$ und trage auf seinem Umfange die Strecken $\varkappa(r_i - r_{i-1})$ ab, beginnend beim wagerechten Durchmesser. Dieser Kreis mag der Meßkreis heißen. Die zugehörigen Zentriwinkel seien mit ψ_i bezeichnet. (Zweckmäßigerweise wählt man die Strecken $r_i - r_{i-1}$ gleich groß, so daß auch alle ψ_i unter sich gleich werden und also nur ψ_1 aufzuzeichnen ist.) Sodann schreite man vom Anfangspunkte R_0 mit der Ordinate 0 (entsprechend der inneren Randbedingung) auf diesem Kreise fort um den Winkel ψ_1 bis zum Punkte R_1, der dann die Ordinate $h \sin \psi_1$ hat, wofür man auch $h \sin\left(\frac{\varkappa r_1}{h} + \gamma_1\right)$ schreiben könnte, falls man $\gamma_1 = -\frac{\varkappa r_0}{h}$ setzte. Der Bogen $R_0 R_1$ stellt also in seinen Ordinaten als Funktionen des Azimutes ψ die Lösung (25) für die erste Teilscheibe vor.

Sodann fälle man von R_1 das Lot $R_1 B_1$ auf die senkrechte Durchmesserachse des Meßkreises; dieses Lot besitzt die Länge $h \cos \psi_1$, und dies ist so viel wie $\frac{h}{\varkappa}\left(\frac{dR}{dr}\right)_{1-0}$. Schneidet man demnach auf dem Lote vom Fußpunkt B_1 gegen R_1 hin die Strecke $B_1 R_1' = q_1 (B_1 R_1)$ ab, so ist gemäß (28) $B_1 R_1' = \frac{h}{\varkappa}\left(\frac{dR}{dr}\right)_{1+0}$, und folglich stellt der Punkt R_1' den Anfang der Lösung (25) für die zweite Teilscheibe dar.

Jetzt schlage man um O einen Kreis durch R_1' und schreite auf dessen Umfang in dem anfänglichen Sinne um den Zentriwinkel ψ_2 fort bis zum Punkte R_2; dann stellt der Bogen $R_1' R_2$ die Lösung (25) für die zweite Teilscheibe vor. Der Uebergang zum An-

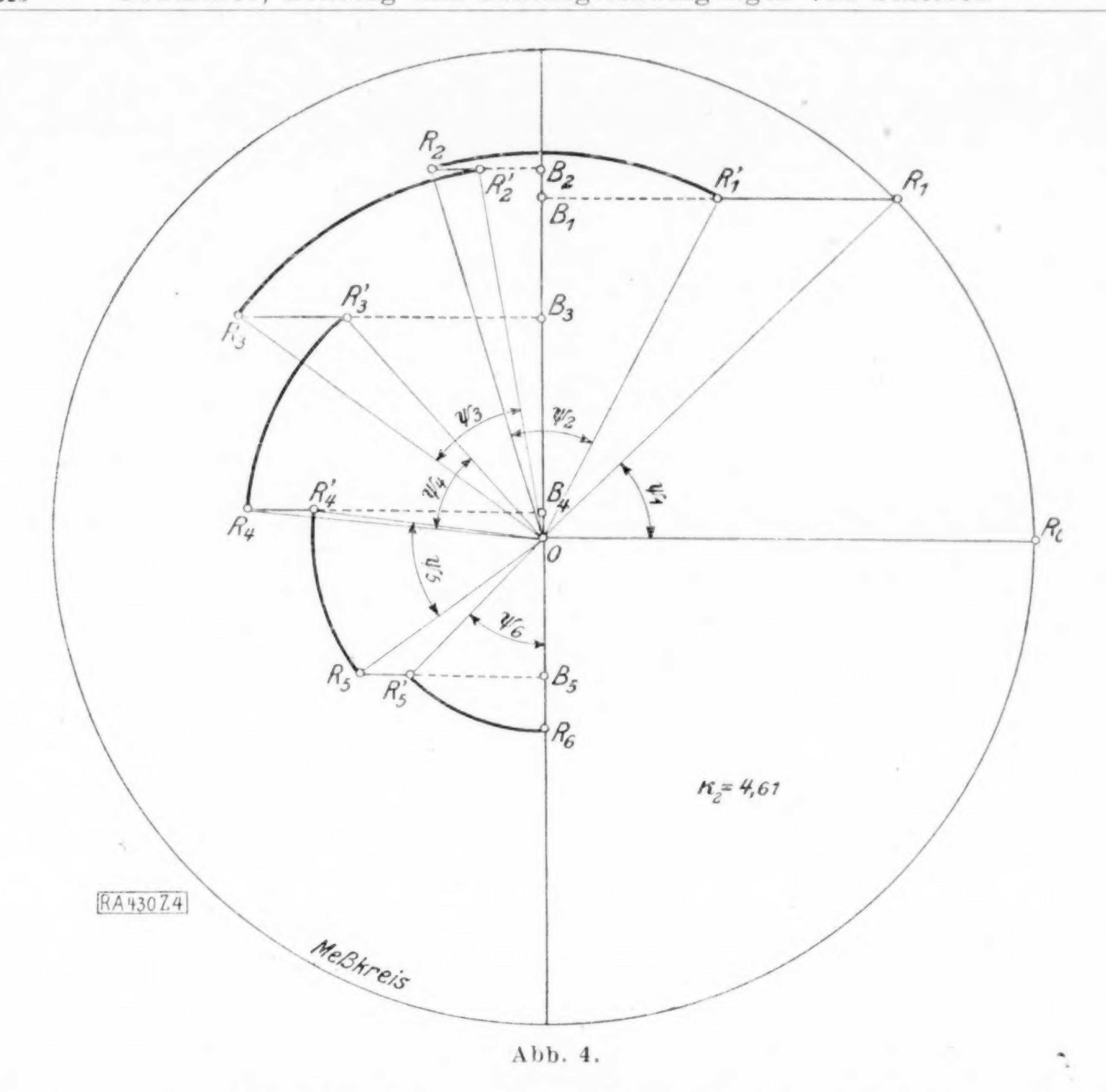


Abb. 4.

fangspunkte R_2' der dritten Teilscheibe geschieht in ganz entsprechender Weise vermittels des Lotes $B_2 R_2' = q_3 (B_2 R_2)$.

So fortfahrend gelangt man schließlich zum Endpunkte R_n der letzten (äußersten) Teilscheibe. Liegt R_n auf dem senkrechten Durchmesser, so ist die Randbedingung $dR/dr = 0$ am Außenrande gerade erfüllt und der gewählte Wert von $\varkappa$ ist richtig. Andernfalls muß die Konstruktion mit einem besseren Werte von $\varkappa$ solange wiederholt werden, bis die Randbedingung wirklich erfüllt ist oder $\varkappa$ wenigstens durch Interpolation bestimmt werden kann. Die Durchführung gelingt sehr rasch und in der Regel nach ganz wenigen Versuchen, wenn man, um sich das Abgreifen der zu den Zentriwinkeln ψ_i gehörigen Kreisbögen $R_{i-1} R_i$ zu erleichtern, Polarkoordinaten-Millimeterpapier verwendet. Man kann dabei natürlich auch vom Außenrand zum Innenrande fortschreiten.

Im Beispiele der Abbildung 4 ist sogleich der Eigenwert $\varkappa_2$ zweiter Ordnung ermittelt worden. In etwas veränderter Weise ist dann in Abbildung 5 auch noch der Eigenwert $\varkappa_1$ erster Ordnung bestimmt, und zwar so, daß für die Teilungen im Verhältnis q_i ein Maßstab auf der wagerechten Durchmesserachse zu Hilfe genommen wird; an die Stelle der Lote $B_i R_i$ und $B_i R_i'$ sind hier die Strecken $O C_i$ und $O C_i' = q_i (O C_i)$ getreten, deren Endpunkte C_i bzw. C_i' mit den Punkten R_i und R_i' durch Lotungen zusammenhängen.

Zu den Fällen II bis V ist noch folgendes zu bemerken: Bei II muß der Anfangspunkt R_0 und der Endpunkt R_n je auf den wagrechten Durchmesser fallen. Bei III müssen beide auf dem senkrechten Durchmesser liegen. Bei IV bzw. V wird man vom Außenrand aus auf dem senkrechten Durchmesser beginnen und hat $\varkappa$ so zu wählen, daß gemäß der inneren Randbedingung (13) bzw. (16) der Endpunkt R_0 auf den Fahrstrahl mit dem Azimut $\operatorname{arctg} (a \varkappa)$ bzw. $\operatorname{arctg} \left(a \frac{\varkappa^2 - b^2}{\varkappa} \right)$ fällt; denn das Azimut irgendeines Fahrstrahles ist, wie vorhin gefunden, gegeben durch

$$\operatorname{arctg} \left(R : \frac{h}{\varkappa} \frac{dR}{dr} \right).$$

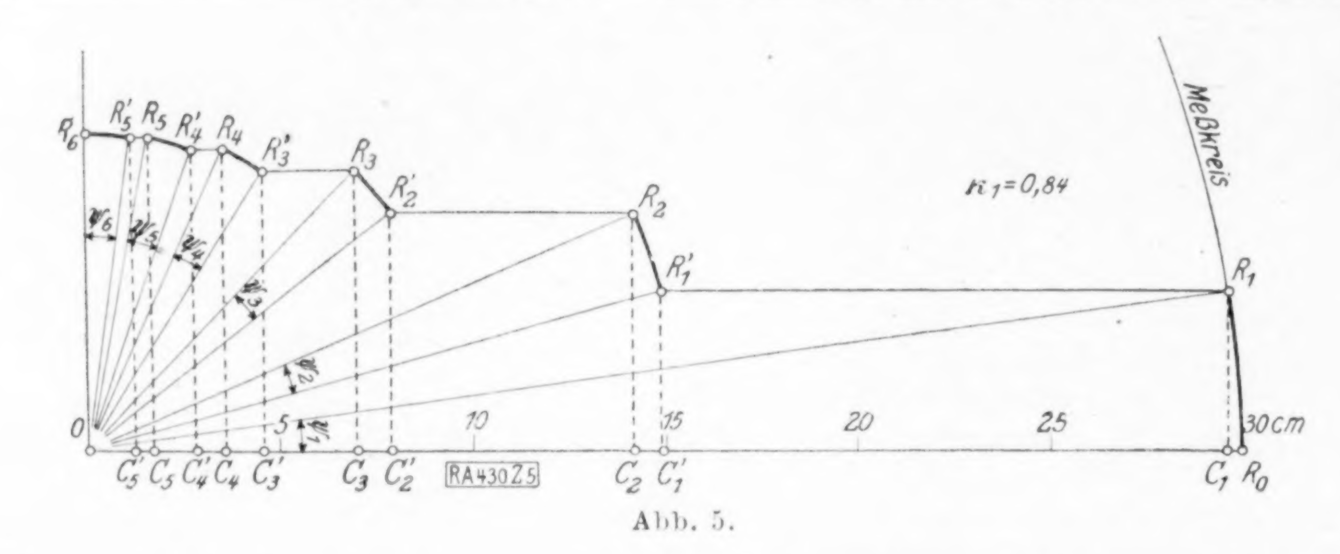


Abb. 5.

Daß dieser Fahrstrahl von dem probeweise gewählten Werte $\varkappa$ abhängt, verursacht keine wesentlichen Schwierigkeiten. Die Eigenwerte höherer Ordnung ergeben sich auch hier in ganz entsprechender Weise.

Aus dem jeweils gefundenen Eigenwerte $\varkappa$ folgt schließlich die gesuchte Frequenz ε (10) der stehenden Schwingungen. Im Beispiel des Profils Abb. 3 findet man gemäß dem Ergebnis der Konstruktion in Abb. 4 und 5 bei einer Stahlscheibe ($G = 850\,000$ kg/qcm, $\varrho = 7{,}85 \cdot 10^{-6}$ kg sek^2/cm^{-4}) für den Fall I die Frequenzen

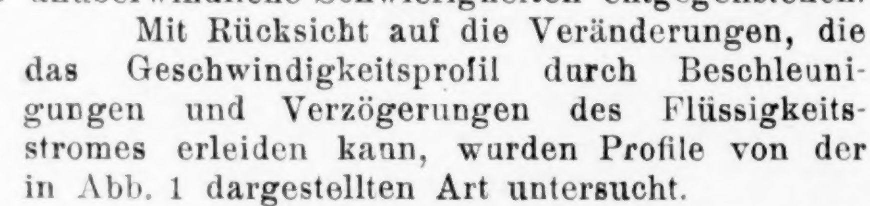
$$\varepsilon_1 = 9200/2\,\pi \text{ sek}, \qquad \varepsilon_2 = 50\,500/2\,\pi \text{ sek}.$$

Die Zahl der Impulse infolge der periodisch wechselnden Beaufschlagung der Schaufeln bei Dampfturbinen kann sehr wohl von der gleichen Größenordnung sein, so daß Resonanzen tatsächlich im Bereiche der Möglichkeit liegen. Ohne Zweifel sind manche sonst unerklärlichen Störungen im Betriebe solcher Turbinen auf Resonanzen dieser Art zurückzuführen. 430

Beiträge zur Entstehung der Turbulenz.[1]

Von **O. TIETJENS** in Göttingen.

Turbulenz ist nicht nur in Röhren und Kanälen beobachtet worden, sondern auch bei Strömungen einer Flüssigkeit längs einer Wand. Eine Voruntersuchung beschäftigt sich mit der Frage der Stabilität oder Labilität einer reibungslosen Strömung längs einer ebenen Wand, deren Geschwindigkeitsprofil von einer solchen Art ist, wie es durch die länger andauernde Wirkung einer kleinen Reibung erzeugt werden kann. Nach dem Vorgang von Lord Rayleigh[2] ist dabei statt eines stetig gerundeten Profils ein aus geraden Linien bestehendes »geknicktes Profil« angenommen, da den Rechnungen für ein gerundetes Profil bisher unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen.


Mit Rücksicht auf die Veränderungen, die das Geschwindigkeitsprofil durch Beschleunigungen und Verzögerungen des Flüssigkeitsstromes erleiden kann, wurden Profile von der in Abb. 1 dargestellten Art untersucht.

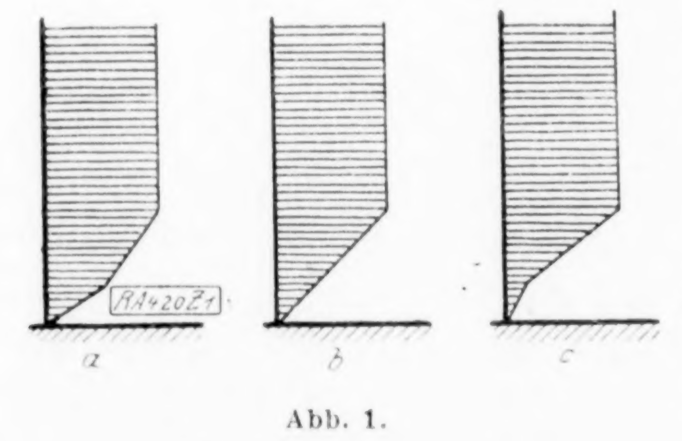


Abb. 1.

Diesen Flüssigkeitsströmungen seien relativ zur Hauptströmung $U(y)$ kleine Zusatzgeschwindigkeiten mit den Komponenten u, v überlagert. Setzt man nun die Flüssigkeit mit dem in einem gewissen Zeitpunkt erhaltenen Profil für die Folge als reibungslos voraus, so läßt sich mit der Methode der kleinen Schwingungen zeigen, daß die

[1] Die vorliegende Abhandlung stellt eine gekürzte Darstellung der Göttinger Dissertation des Verfassers 1922 (Referent: Prof. Dr. L. Prandtl) dar und bringt die Einzelausführungen zu dem in dieser Zeitschrift erschienenen Jenaer Vortrag von L. Prandtl, Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. Diese Zeitschr. 1, S. 431 bis 436 (1921); und Phys. Zs. 23, (1922) S. 19 bis 25.

[2] Lord Rayleigh, On the stability or instability of certain fluid motions. II. Proc. Lon. math. Soc. XIX, p. 67 (1887) oder: Papers, vol. III. p. 17.

Zusatzgeschwindigkeiten — die Störungen — in gewissen Fällen mit der Zeit abklingen (Stabilität), in anderen Fällen hingegen zeitlich anwachsen (Labilität).

Dabei ergab sich, daß die Form a und b einer stabilen, die Form c einer labilen Strömung entsprach.

Daraus wurde geschlossen, daß vorbehaltlich einer etwaigen Korrektion durch die Flüssigkeitsreibung die stetigen Profile mit Wendepunkt, die bei Verzögerung der Strömung auftreten, Labilität ergeben. Die Turbulenz der Grenzschicht bei Kugeln und anderen gerundeten Körpern, bei denen vor der Ablösungsstelle Verzögerung der Strömung auftritt [1], ist wahrscheinlich so auf diese Weise zu erklären.

Um die Wirkung der Zähigkeit abzuschätzen, wurde ein im folgenden näher beschriebenes Verfahren ausgearbeitet, das die niedrigste Ordnung der Reibungsglieder in den Gleichungen zu berücksichtigen gestattet. Die ursprüngliche Absicht dabei war, die Dämpfung zu berechnen, die die Reibung der ohne Reibung vorhandenen Labilität entgegenstellt, um so die Grenze abzuschätzen, unterhalb derer die Labilität verschwindet, und also die Grenzschicht an der Körperfläche laminar bleibt.

Wider alles Erwarten ergab diese Rechnung aber, daß die Zähigkeit nicht nur keine Dämpfung, sondern sogar ein Labilwerden auch der Profile a und b bewirkt; allerdings ist das Anwachsen der Störung in diesen Fällen nur schwach im Vergleich zu dem im Falle c. Die ganze Fragestellung wurde durch dieses Ergebnis aber gänzlich verschoben. Die Rechnungen unter Berücksichtigung der Reibung sind im folgenden dargestellt.

1. Aufstellung der Differentialgleichung für die Grenzschicht. Als Störung, die sich der Hauptströmung $U(y)$ überlagert, wird eine sinusförmige [2] Wellenbewegung angenommen:

$$\bar{u} = e^{i(kx - nt)} f(y),$$

woraus sich die zu $\bar{u}$ senkrechte Komponente $\bar{v}$ wegen der Kontinuität aus

$$\bar{u} = -\frac{i}{k}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$

ergibt. (k ist reell; n im allgemeinen komplex $= r + i s$.)

Die Abhängigkeit von y ergibt sich bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in $\bar{u}$, $\bar{v}$ aus der Bewegungsgleichung für reibungslose Flüssigkeit zu:

$$\left(U - \frac{n}{k}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - k\bar{v}\right) - \bar{v}\frac{d^2 U}{d y^2} = 0.$$

Ersetzt man mit Lord Rayleigh [3] das stetige Geschwindigkeitsprofil durch ein aus Geraden bestehendes, geknicktes, so daß innerhalb der einzelnen Streifen

$$\frac{d^2 U}{d y^2} = 0$$

ist, so erhält man, da im allgemeinen $U - n/k \neq 0$ ist, für jeden Streifen:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - k^2 \bar{v} = 0,$$

mithin für jeden Streifen eine Lösung:

$$\bar{v} = A \operatorname{Sin} k y + B \operatorname{Cof} k y,$$

wobei sich die Konstanten A, B aus den Grenzbedingungen an den Streifenrändern ergeben. Die Gleichungen für diese Grenzbedingungen liefern eine Determinante, aus der sich $n = r + i s$ berechnen läßt.

Je nachdem s positiv oder negativ ist, nehmen $\bar{u}$ und $\bar{v}$, die ja den Faktor e^{st} haben, mit der Zeit exponentiell zu (Labilität, turbulente Strömung) oder ab (Stabilität, laminare Strömung). Nach dieser Methode sind einige Geschwindigkeitsprofile durchgerechnet worden und das Vorzeichen von s bestimmt.

Bei Berücksichtigung der Zähigkeit stand von vornherein fest, daß nur Flüssigkeiten sehr geringer Reibung der Untersuchung zugrunde gelegt werden sollten, und zwar —

[1] L. Prandtl, Der Luftwiderstand an Kugeln — Nachr. d. K. Ges. d Wissensch. zu Göttingen (1914), S. 177.

[2] Daß dieses keine wesentliche Einschränkung des allgemeinen Falles bedeutet, hat O. Haupt gezeigt: Sitzungsber. d. Bayr. Akad Heft II (1912).

[3] Lord Rayleigh, Siehe Fußnote auf S. 200.

als eine Näherungsmethode 1. Ordnung — nur solche Flüssigkeiten, bei denen der Einfluß der Zähigkeit von der Größenordnung $\sqrt{\nu}$ [1]) vorherrscht und Glieder von der Größenordnung $\nu, \nu^2 \ldots$ vernachlässigt werden können.

Wie eine Energiebetrachtung zeigt, kommt nur die Wirkung einer so geringen Zähigkeit in erster Linie zur Geltung in einer schmalen Schicht in unmittelbarer Wandnähe. Es ist dies gleichsam eine zweite Grenzschicht innerhalb derjenigen Grenzschicht, die durch den ersten Streifen des Geschwindigkeitsprofiles definiert wird. In dieser schmalen Grenzschicht δ, die von der Größenordnung $\sqrt{\nu/n}$ ist ($\sqrt{\nu/n}$ = Länge), vollzieht sich durch die Zähigkeitswirkung der Uebergang der endlichen Geschwindigkeiten an der Wand, die der reibungslosen Rayleigh-Schwingung entspricht, auf Null, gemäß dem zu fordernden Haften der Flüssigkeit an der Wand.

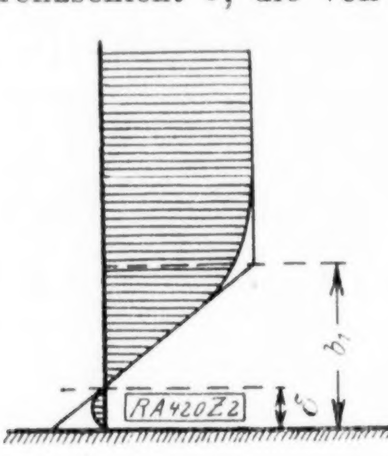


Abb. 2.

Wie bei der Prandtlschen Grenzschicht-Theorie kommt es auch hier darauf hinaus, daß nur der Teil innerhalb dieser Schicht δ als reibende Flüssigkeit, das übrige aber als reibungslos aufgefaßt werden kann.

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v der zähen Flüssigkeit setzen sich zusammen aus denen der Hauptbewegung $U(y)$, aus den Komponenten der Störungsbewegung soweit sie reibungsfrei gedacht ist $\bar{u}, \bar{v}$, sowie innerhalb der Grenzschicht δ aus den Komponenten der Zusatzgeschwindigkeiten u^*, v^*, welche dem durch die Zähigkeit bedingten Haften der Flüssigkeit an der Wand Rechnung tragen:

$$u = U(y) + \bar{u} + u^*, \qquad v = \bar{v} + v^*.$$

Berücksichtigt man in den Navier-Stokesschen Gleichungen die Vernachlässigung der Glieder von der Größenordnung $\nu, \nu^2 \ldots$ usw., wie auch die Vereinfachungen, die sich aus der Grenzschicht ergeben ($\sqrt{\nu/n} \sim \delta \ll 1$), so erhält man unter der Voraussetzung sehr kleiner Schwingungen $|\bar{u}| \ll U$ die Prandtlsche Grenzschicht-Gleichung:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + U\frac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \;{}^{2)}$$

(denn innerhalb der Grenzschicht ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, und bei festem x auch $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}$).

Setzt man noch $U = \frac{dU}{dy} \cdot y$ und bildet die Ableitung nach y, so ist, wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \qquad \text{ist}, \qquad \frac{\partial^2 u^*}{\partial t\, \partial y} + \frac{dU}{dy} \cdot y \frac{\partial^2 u^*}{\partial x\, \partial y} = \nu \frac{\partial^3 u^*}{\partial y^3}$$

und bei Einführung der Stromfunktion $u^* = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und $v^* = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, wo $\Psi = e^{i(kx - nt)} f(y)$ ist:

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial t\, \partial y^2} + \frac{dU}{dy} \cdot y \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x\, \partial y^2} = \nu \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4}.$$

Setzt man noch:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = e^{i(kx - nt)} \varphi(y),$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$\varphi''(y) = i/\nu \left(\frac{dU}{dy} k\, y - n\right) \cdot \varphi(y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Da die weitere Betrachtung sich hauptsächlich auf die Vorgänge in der schmalen Grenzschicht δ erstreckt, ist es praktisch, die zur Wand senkrechte y-Koordinate zu substituieren durch

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu/n}} \sim \frac{y}{\delta}.$$

---

[1]) $\frac{\mu}{\varrho} = \frac{\text{Zähigkeitskoeff.}}{\text{Dichte}}$ = kinematische Zähigkeit = ν.

[2]) L. Prandtl, Verhandl. des III. int. Math Kongresses 1904 (Heidelberg), Leipzig 1905, S. 484 oder Th. v. Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, diese Ztschr. 1, (1921), S. 235.

Für sehr große η (geschrieben: $\eta = \infty$) kann y also noch immer beliebig klein sein, wenn nur ν genügend klein genommen wird.

In η geschrieben, ergibt sich für die obige Gleichung (1)

$$\varphi''(\eta) = i\left(\frac{d\,U}{d\,\eta}\cdot\frac{k}{n}\eta - 1\right)\cdot\varphi(\eta) \quad \ldots \quad (1).$$

Führt man weiterhin als neue Variable ein:

$$Z = \frac{\frac{d\,U}{d\,y}\cdot k\,y - n}{\left(\frac{d\,U}{d\,y}k\sqrt{\nu}\right)^{2/3}} \text{ bezw. } Z = \frac{\frac{d\,U}{d\,\eta}\cdot\frac{k}{n}\eta - 1}{\left(\frac{d\,U}{d\,\eta}\cdot\frac{k}{n}\right)^{2/3}} \quad \ldots \quad (2),$$

so läßt sich die Gleichung schreiben:

$$\Phi''(z) - i\,z\,\Phi(z) = 0 \quad \ldots \quad (3).$$

Ehe jedoch diese nicht ganz einfache Differentialgleichung, die auf Besselsche Funktionen führt, allgemein untersucht werden wird, ist es empfehlenswert, einen Spezialfall vorher zu betrachten.

2. Vereinfachung der Differentialgleichung durch Annahme einer relativ großen Phasengeschwindigkeit der Störung. Nimmt man den Fall an, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung in der x-Richtung

$$U^0 = \Re e\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{r}{k}\,[1]$$

so groß ist, daß die Schicht, deren Geschwindigkeit U mit U^0 übereinstimmt, schon reichlich außerhalb der betrachteten Grenzschicht liegt, und ist y^* die Ordinate für $U = U^0$, so ist mit $U^0 = \frac{d\,U}{d\,y}\cdot y^*$

$$\frac{d\,U}{d\,y}\cdot y^* = \frac{r}{k};$$

ist jetzt $\delta \ll y^*$, so wird

$$\frac{d\,U}{d\,y}k\,y \ll r,$$

da in dem für Gl. (1) praktisch in Betracht kommenden Gebiet $0 \leq y \leq m\,\delta$ ist (m = mäßig große Zahl). Da also $\delta = \sqrt{\nu/r}$ ist, kommt es darauf hinaus, daß

$$\frac{d\,U}{d\,y}\cdot\frac{k}{r}\cdot\sqrt{\frac{\nu}{r}} = \frac{d\,U}{d\,y}\sqrt{\frac{\nu}{k\,U^{0\,3}}} \ll 1$$

ist. Unter dieser Voraussetzung geht die Gl. (1) näherungsweise über in:

$$\varphi''(\eta) = -\,i\,\varphi(\eta) \quad \ldots \quad (4)$$

mit der Lösung:

$$\varphi(\eta) = \text{konst.}\, e^{\pm\frac{i-1}{\sqrt{2}}\eta} \quad \ldots \quad (5).$$

Das Vorzeichen ist so zu nehmen, daß der reelle Teil des Exponenten negativ wird, damit die Exponentialfunktion mit wachsendem η abklingt. Die Konstante ergibt sich aus der Bedingung, daß für

$$\eta = 0 \ldots\ldots u = 0$$

sein muß, d. h.

$$u^*_0 = -\,\overline{u}_0$$

ist die Zusatzgeschwindigkeit mit der Bestimmung, die Geschwindigkeit der Rayleigh-Schwingung an der Wand ($\overline{u}_0$) aufzuheben, um dadurch die Grenzbedingung des Haftens an der Wand zu befriedigen.

Hat also die Rayleigh-Schwingung an der Wand ($\eta = 0$) die Geschwindigkeit:

$$\overline{u}_0 = C\,e^{i(kx - nt)},$$

so ist die obige Konstante so zu bestimmen, daß

$$u^* = -\,C\,e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}\eta}\cdot e^{i(kx - nt)}$$

[1]) $\Re e\,(n/k)$ = Reeller Teil von n/k.

ist. Wegen der Kontinuität bringt die Zusatzbewegung u^* auch eine Zusatzgeschwindigkeit v^* hervor.

Aus
$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0$$
folgt:
$$\frac{\partial v^*}{\partial y} = - i k u^* \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = - i k \sqrt{\frac{\nu}{n}}\, u^*.$$
Mithin, da für $\eta = 0$ auch $v^* = 0$,
$$v^*(\eta) = C \frac{i-1}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{n}} \left(1 - e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}\eta}\right) e^{i(kx - nt)}.$$

Für große Werte von η (geschrieben: $\eta = \infty$) nimmt v^* den asymptotischen Wert:
$$v^*_\infty = C \frac{i-1}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{n}}\, e^{i(kx - nt)}$$
an. Für eine reibungslose Flüssigkeit ergibt sich nach dem Vorherigen
$$\overline{v} = A \,\mathfrak{Sin}\, k y + B \,\mathfrak{Cof}\, k y$$
und, da für $y = 0$ auch $\overline{v} = 0$, $\overline{v} = A \,\mathfrak{Sin}\, k y$.

Wegen $\overline{u} = \frac{i}{k} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}$ ergibt sich also $\overline{u}_0 = i A$.

Mithin:
$$C e^{i(kx - nt)} = i A,$$
so daß man schreiben kann:
$$v^*_\infty = - A \frac{1+i}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{n}}.$$

Nach einem Vorschlage von Hrn. Prandtl ist jetzt ein formaler Uebergang von der zähen Flüssigkeit zur reibungslosen möglich. Die Zusatzgeschwindigkeit v^* rührt davon her, daß die Geschwindigkeit $\overline{u}$ in der Nähe der Wand durch die Zähigkeitswirkung abgeändert wird. Nimmt man nun an, daß die Geschwindigkeit v^*_∞ bereits an der Wand vorhanden wäre, die Geschwindigkeit im übrigen aber so wie bei der reibungslosen Bewegung verteilt sei, so wird damit die Zähigkeitswirkung der Grenzschicht auf das Innere der Flüssigkeit ausreichend berücksichtigt.

3. Einige spezielle Geschwindigkeitsprofile. Mit dieser Aenderung der Grenzbedingungen wurde die Rechnung für mehrere Spezialfälle der Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmung durchgeführt.

Vorausgesetzt ist also immer, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungsschwingung groß genug ist, so daß die oben erhaltene Lösung (5) der Differentialgleichung (4) als Näherungslösung der Besselschen Differentialgleichung gelten kann.

In den gerechneten Fällen Abb. 3 bis 5 ist der Gang der Rechnung der, daß nach Rayleigh die Lösungen der Differentialgleichung für reibungslose Flüssigkeit für die einzelnen Streifen aufgestellt, und die Konstanten unter Berücksichtigung der neuen Grenzbedingungen an den Wänden bestimmt werden.

Die Bedingungsgleichungen, die das Verhalten der Strömung an den Wänden und an den Streifenübergängen charakterisieren, ergeben dann ein System homogener Gleichungen, dessen Determinante verschwinden muß; dies ergibt eine Gleichung für n von dem Grade, als das Geschwindigkeitsprofil Streifen zählt (in unserem Fall also 2 bzw. 3).

Setzt man in der Gleichung für n, die nach Potenzen von $\sqrt{\nu}$ entwickelt ist,
$$n = n_0 + n_1,$$
wobei sich n_0 auf die reibungslose Flüssigkeit ($\nu = 0$) bezieht, n_1 also die Korrektur durch die Reibung darstellt, so erhält man unter alleiniger Berücksichtigung der ersten Potenzen von $\sqrt{\nu}$, wenn man
$$n_1 = r_1 + i s_1$$
setzt, für s_1 in den einzelnen Fällen ($r > 0$):

$$\text{Abb. 3} \ldots\ s_1 = \frac{U\sqrt{\nu}}{b_1^2} \cdot \frac{3 - \mathfrak{Tg}^2 k b_1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{k b_1}{\sqrt{n_0}}, \qquad \text{Abb. 4} \ldots\ s_1 = \frac{U\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}\, b_1^2} \cdot e^{-2 k b_1} \cdot \frac{k b_1}{\sqrt{n_0}},$$

$$\text{Abb. 5} \ldots\ s_1 = \frac{U\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}\, b_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}^2 k b_1}{\mathfrak{Cof}^2 2 k b_1} \cdot \frac{k b_1}{\sqrt{n_0}}, \qquad \text{Abb. 5} \ldots\ s_1 = \frac{U\sqrt{\nu}}{4\sqrt{2}\, b_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, 2 k b_1}{\mathfrak{Cof}^2 k b_1} \cdot \frac{k b_1}{\sqrt{n_0}}.$$

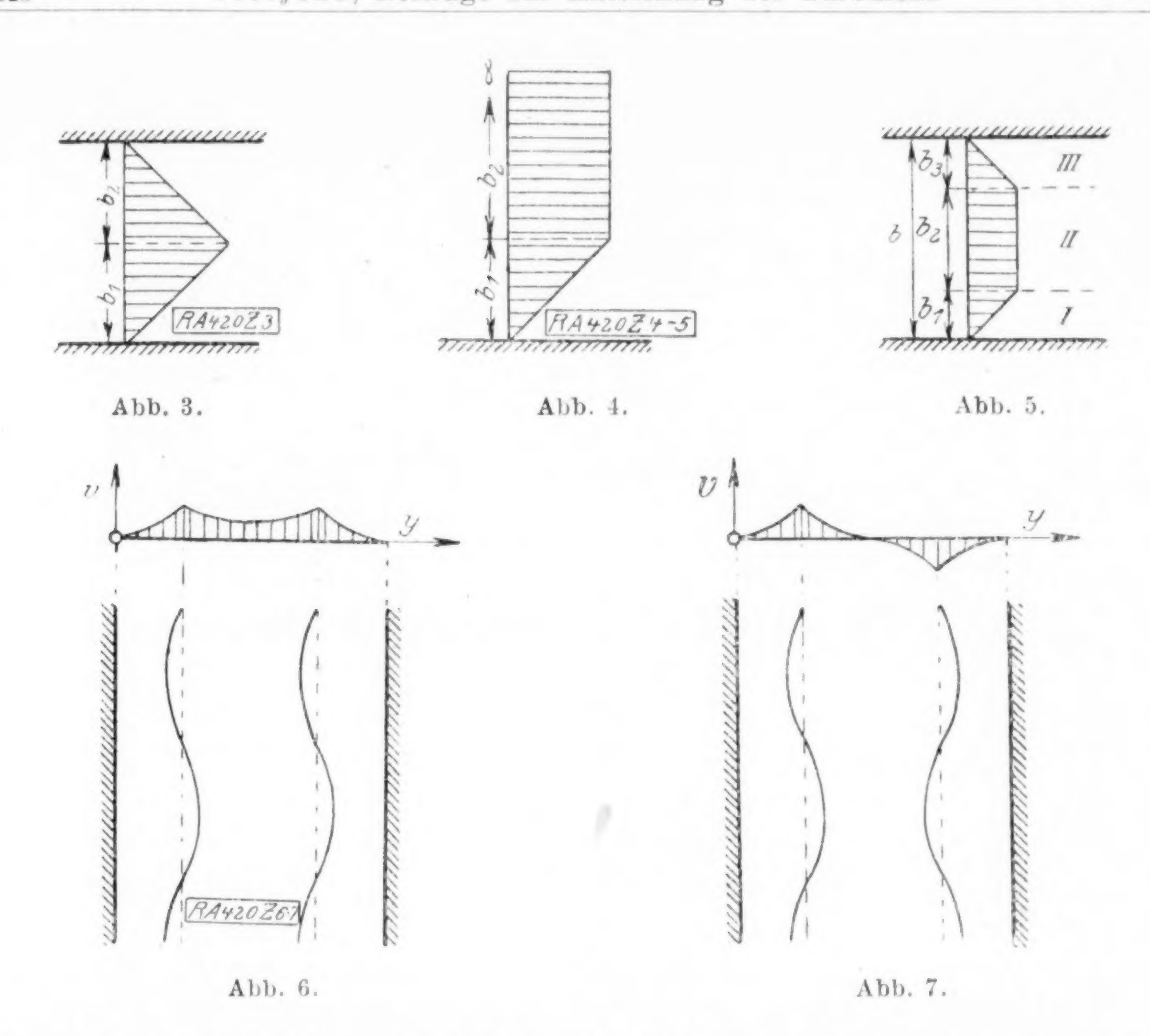


Abb. 3. Abb. 4. Abb. 5.

Abb. 6. Abb. 7.

Beim Geschwindigkeitsprofil Abb. 5 sind die beiden Fälle untersucht, daß für ein bestimmtes x an den beiden Geschwindigkeitsknicken die Werte von v einander gleich oder entgegengesetzt sind; es entspricht dieses den Schwingungsbildern von Abb. 6 und 7.

Für das Geschwindigkeitsprofil Abb. 4 ergibt sich für n:

$$n = n_0 + n_1 = \frac{U}{2\,b_1}\left[2\,k\,b_1 - 1 + e^{-2\,k\,b_1}\left(1 + (1+i)\sqrt{2\,k}\sqrt{\frac{\nu}{n_0}}\right)\right] \quad . \quad . \quad (6).$$

Auf den Abb. 8, 9, 10, 11 ist für die Spezialfälle Abb. 3, 4, 5 der Zusammenhang des Zeitfaktors n mit der Wellenlänge graphisch aufgetragen und zwar, um eine Beziehung zwischen dimensionslosen Größen zu erhalten:

$$n_0 \cdot \frac{b_1}{U} \text{ (reibungslose Flüssigkeit)}, \qquad s_1\sqrt{\frac{{b_1}^3}{\nu\,U}} \text{ (Flüssigkeit geringer Reibung)}$$

als Funktion von $k\,b_1$. (Gerechnet wurden die Kurven für: $U = 1$, $b = 1$).

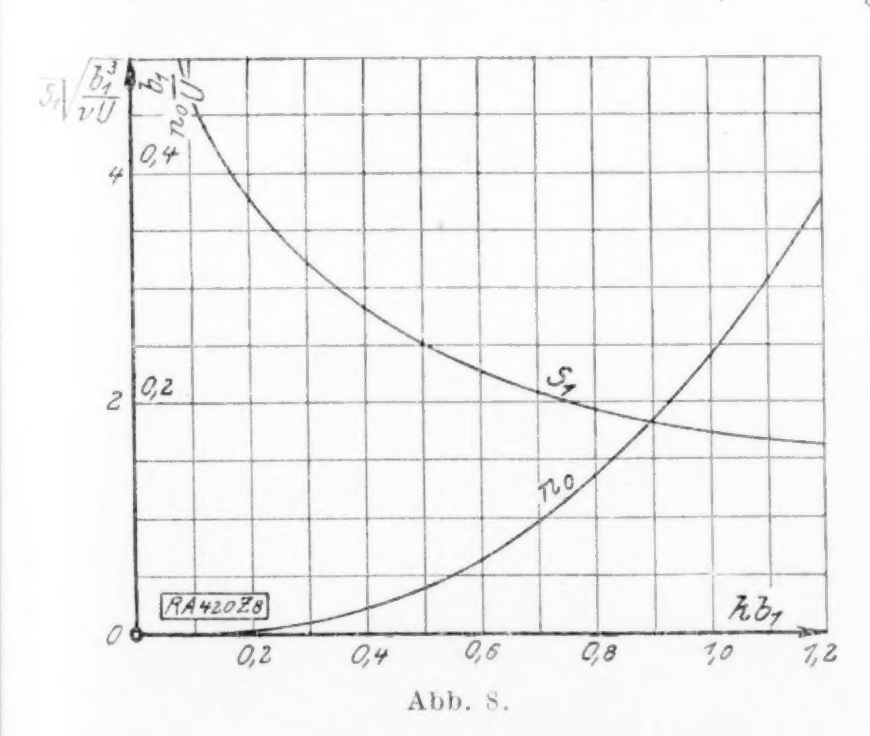


Abb. 8.

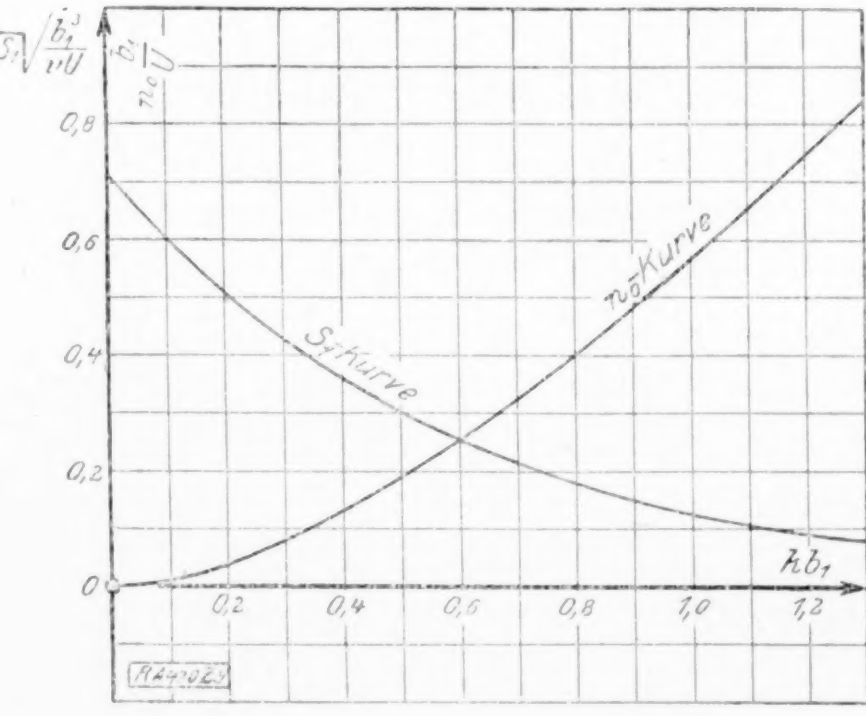


Abb. 9.

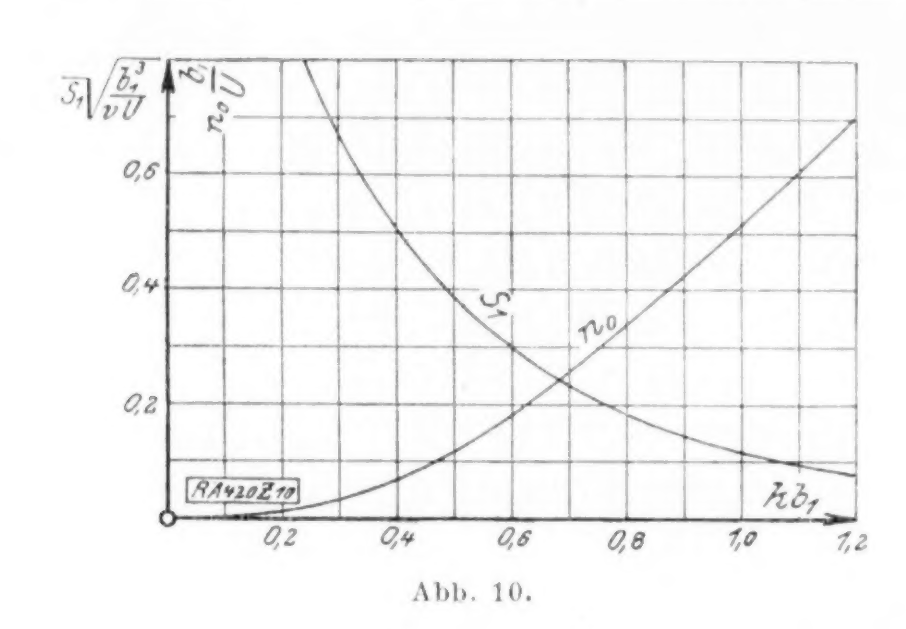


Abb. 10.

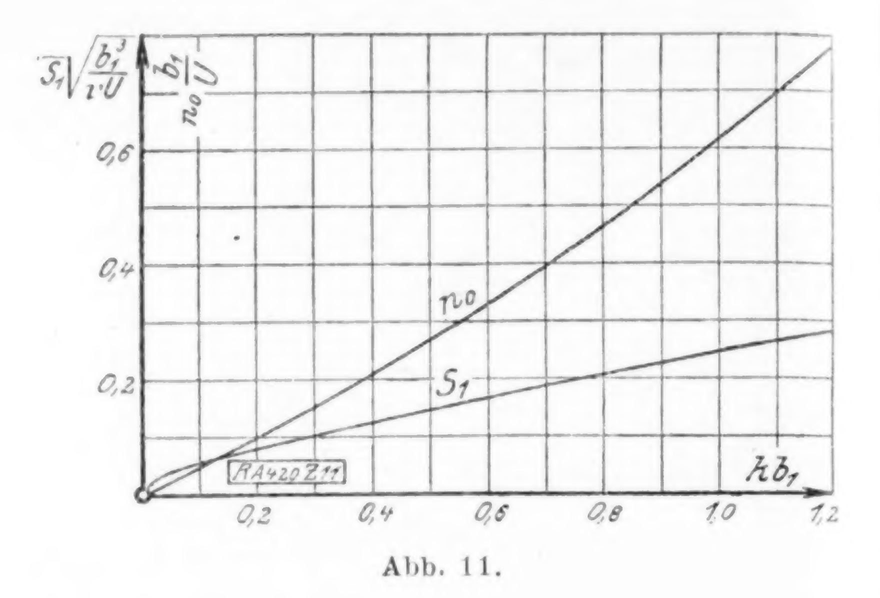


Abb. 11.

Es ergibt sich hier das eingangs erwähnte gegen alle Erwartung sprechende Resultat, daß s_1, der imaginäre Teil des Faktors von t in

$$e^{-int} = e^{-i(r+is)t} = e^{-irt} \cdot e^{st},$$

in allen Fällen positiv ist, und zwar für alle Werte von k, d. h. für alle Wellenlängen. $(\lambda = 2\pi/k)$.

Die Einführung einer geringen Zähigkeit zu einer sonst stabilen Strömung einer reibungslos gedachten Flüssigkeit ergibt also für alle Wellenlängen eine Anfachung der Störungsschwingung, d. h. Labilität der Strömung (Turbulenz).

Das Ergebnis dieser ganzen Rechnung, daß die Einführung einer geringen Zähigkeit statt einer Dämpfung eine Anfachung der Störungsschwingung zur Folge hat, steht so sehr im Widerspruch zu den bisherigen Anschauungen über die Wirkungsweise der Zähigkeit, daß man sich fragt, ob nicht ein Fehler entweder in den Voraussetzungen oder in der Rechnung unterlaufen ist.

Was die Rechnung anbetrifft, so ist zu sagen, daß dieselben Resultate auch auf anderen — von den angegebenen ganz unabhängigen — Wegen gefunden sind, hier also wohl alles in Ordnung ist.

Was die Voraussetzungen anbelangt, so sind — abgesehen von den geknickten Geschwindigkeitsprofilen, über die später noch zu sprechen sein wird — die Vereinfachungen, die aus der Annahme einer sehr geringen Zähigkeit sich ergeben, wohl einwandfrei. Es bleibt also die Voraussetzung zu prüfen, daß die Phasengeschwindigkeit der Schwingung so groß ist, daß die Schicht der Hauptströmung, die diese Geschwindigkeit besitzt, schon weit außerhalb der betrachteten Grenzschicht δ liegt.

Eine gewisse Willkürlichkeit läßt sich dieser Annahme nicht absprechen. Die folgende Ueberlegung soll zeigen, ob und in welcher Richtung die bisherigen Resultate abgeändert werden, wenn diese Voraussetzung fallen gelassen wird.

4. Lösung der vollständigen Differentialgleichung der Grenzschicht. Für den Spezialfall Abb. 4 ergab sich nach Gl. (6) für n_1

$$n_1 = r_1 + i s_1 = \frac{U}{b_1} e^{-2kb_1} \frac{1+i}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{n}},$$

so daß man unter Benutzung von

$$v_\infty^* = -A \frac{1+i}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{n}} \quad \text{schreiben kann:} \quad n_1 = r_1 + i s_1 = -\frac{U}{b_1} e^{-2kb_1} \frac{v_\infty^*}{A}.$$

Ist zu irgendeiner Zeit A reell, so ergibt sich ein Phasendiagramm der Schwingung, wie in Abb. 12 gezeichnet. Der imaginäre Teil von n_1 — d. i. der negative imaginäre Teil von v_∞^* —, der über Labilität oder Stabilität entscheidet, ist positiv, also Anfachung der Störungsgeschwindigkeit. Es müßte eine Drehung von v_∞^* um mehr als 45^0 im Uhrzeigersinn erfolgen, damit s_1 negativ wird.

Setzt man in der vereinfachten Differentialgleichung

$$\varphi''(\eta) = -i\varphi(\eta)$$

$$\varphi = \chi + i\psi, \quad \text{so wird} \quad \chi'' = \psi, \quad \psi'' = \chi,$$

und als Polardiagramm erhält man gemäß der Lösung Gl. (5) eine logarithmische Spirale entsprechend Abb. 13.

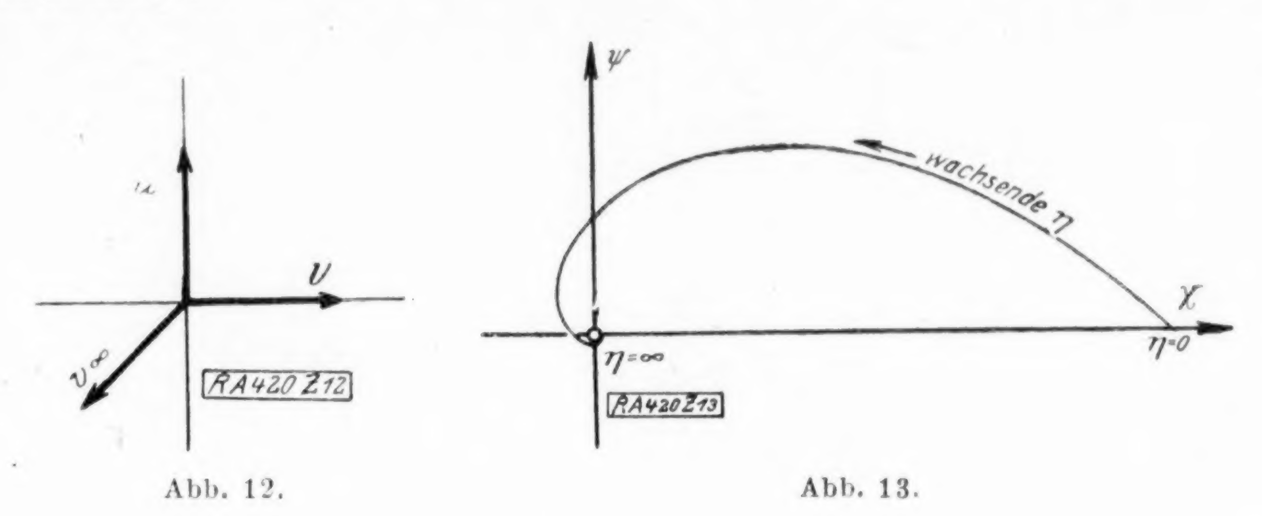


Abb. 12. Abb. 13.

Die vollständige Differentialgleichung

$$\varphi''(\eta) = i\left(\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{k}{n}\cdot\eta - 1\right)\varphi(\eta) \quad \text{oder mit} \quad z = \frac{\frac{dU}{d\eta}\frac{k}{n}\cdot\eta - 1}{\left(\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{k}{n}\right)^{2/3}}$$

geschrieben

$$\Phi''(z) = i\,z\,\Phi(z)$$

ergibt, wenn man wieder $\Phi = X + i\,\Psi$ setzt:

$$X'' = -z\,\Psi, \qquad \Psi'' = z\,X.$$

Die zeichnerische Diskussion dieses Gleichungssystems liefert hier ein Polardiagramm vom Typus der Abb. 14. Der Wendepunkt entspricht der Stelle $z = 0$.

Wird diese Abbildung in verschiedenen Maßstäben gezeichnet und durch passende Drehung der Anfangspunkt mit dem von Abb. 13 zur Deckung gebracht, so ergibt sich Abb. 15, die zeigt, wie die Lösung für kleines U^0, also auch für kleines n in die frühere Lösung für großes U^0 übergeht.

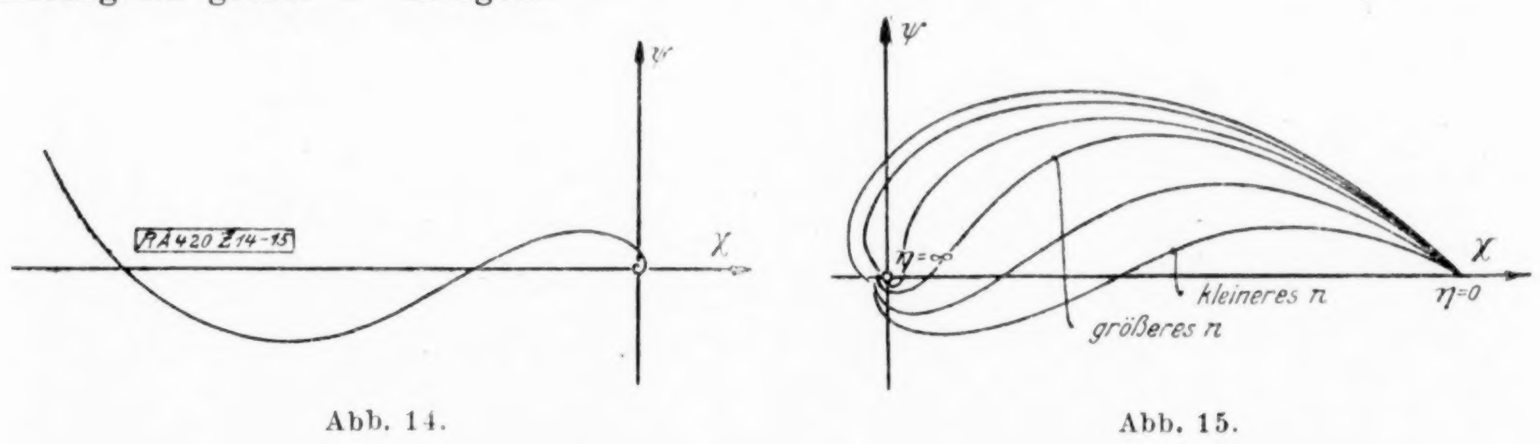


Abb. 14. Abb. 15.

Wie eine nähere Untersuchung zeigt, kann man aus dem Verhalten der Polardiagramme Schlüsse auf die Phase von $v_\infty{}^*$ ziehen; und zwar ergibt sich, daß aus der Verfeinerung der Theorie bei Annahme einer kleinen Phasengeschwindigkeit U^0 tatsächlich eine Drehung des Phasenvektors $v_\infty{}^*$ in der Richtung erfolgt, die Stabilität vermuten läßt.

Durch unsere Substitution

$$z = \frac{\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{k}{n}\,\eta - 1}{\left(\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{k}{n}\right)^{2/3}} \quad \text{geht} \quad f''(\eta) = \nu/n\,\varphi(\eta)$$

über in:

$$F''(z) = \frac{\nu}{\left(\frac{dU}{d\eta}\,k\sqrt{n}\right)^{2/3}}\,\Phi(z)\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Als Lösung von (3) ergeben sich die **Besselschen** Funktionen mit dem Parameter $1/3$

$$\Phi_1(z) = z^{1/2}\,J_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-i\,z^3}\right), \qquad \Phi_2(z) = z^{1/2}\,J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-i\,z^3}\right),$$

so daß sich als Lösung von (7) ergibt:

$$L_1(z) = \frac{\sqrt{\nu}}{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}} \int^z \Phi_1(t)(z-t)\,dt + \text{konst.}_1 \cdot z + \text{konst.}_2$$

$$L_2(z) = \frac{\sqrt{\nu}}{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}} \int^z \Phi_2(t)(z-t)\,dt + \text{konst.}_3 \cdot z + \text{konst.}_4$$

Mithin hat man als allgemeine Lösung von (7), wenn man setzt:

$$F_{1,2} = \int^z \Phi_{1,2}(t)(z-t)\,dt,$$

wobei die untere Grenze noch offen gelassen ist:

$$F(z) = \frac{\sqrt{\nu}}{\left(\frac{dU}{d\eta} \cdot k \sqrt{n}\right)^{1/3}} (a F_1 + b F_2 + c z + d).$$

Grenzbedingungen:

$$\eta = 0 \ \ldots\ z = z_0 \ \ldots\ u_0^* = -\overline{u}_0 = \sqrt{\frac{n}{\nu}} f'(\eta)_0 = \frac{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} F'(z_0)$$

$$\eta = 0 \ \ldots\ z = z_0 \ \ldots\ v_0^* = 0 = k/i\, f(\eta)_0 = k/i\, F(z_0)$$

$$\eta = \infty \ \ldots\ z = \infty \ \ldots\ u_\infty^* = 0 = \sqrt{\frac{n}{\nu}} f'(\eta)_\infty = \frac{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} F'(z)_\infty$$

$$\eta = \infty \ \ldots\ z = \infty \ \ldots\ v_\infty^* = v^* = k/i\, f(\eta)_\infty = k/i\, F(z)_\infty.$$

Setzt man nun in F_1 und F_2 als untere Grenze z_0 ein, so ist:

$$F(z_0) = v_0^* = 0 = c z_0 + d;$$

also:

$$d = -c z_0,$$

und

$$F'(z_0) \cdot \frac{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} = -\overline{u}_0 = c.$$

Mithin ist, wenn noch $a = -\alpha \overline{u}_0$ und $b = -\beta \overline{u}_0$ gesetzt wird:

$$\frac{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} F(z) = -\overline{u}_0 (\alpha F_1 + \beta F_2 + z - z_0).$$

Andererseits ist die Lösung von (3) auch gegeben durch die Hankelsche Funktion erster und zweiter Art von dem Parameter $^1/_3$

$$\Phi_3(z) = z^{1/2} H_{1/3}^{(1)}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-i z^3}\right), \qquad \Phi_4(z) = z^{1/2} H_{1/3}^{(2)}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-i z^3}\right).$$

Bezeichnet man wieder:

$$F_{3,4} = \int^z \Phi_{3,4}(t)(z-t)\,dt,$$

so ergibt sich als zweite allgemeine Lösung von (7)

$$F(z) = \frac{\sqrt{\nu}}{\left(\frac{dU}{d\eta} \cdot k \sqrt{n}\right)^{1/3}} \cdot (\overline{a} F_3 + \overline{b} F_4 + \overline{c} z + \overline{d}.$$

Setzt man als untere Grenze in F_3 und F_4 $z = \infty$, so ist

$$\frac{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} F'(\infty) = u_\infty^* = 0 = \overline{a} F'_3(\infty) + \overline{b} F'_4(\infty) + c.$$

Da in

$$F_3' = \int_{\infty}^{z} t^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left(2/3 \sqrt{-i z^3}\right) d t$$

der Integrand mit wachsendem t wegen des negativen imaginären Teiles des Argumentes beliebig groß wird, so muß

$$a = 0$$

sein. Wegen des Verschwindens von $u_\infty{}^*$ muß auch $c = 0$ sein.

Man hat somit einerseits:

$$\frac{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} F(z) = - u_0 (\alpha F_1 + \beta F_2 + z - z_0)$$

und andererseits, wenn $\bar{b} = - B \bar{u}_0$ und $\bar{d} = - D \bar{u}_0$ gesetzt wird,

$$\frac{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} \bar{F}(z) = - \bar{u}_0 (B F_4 + D) \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Es ist

$$v^* = k/i\, F(z) \qquad \text{bezw.} \qquad v^* = k/i\, \bar{F}(z)$$

und

$$u^* = \frac{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} F'(z) \qquad \text{bezw.} \qquad u^* = \frac{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} \bar{F}'(z) \quad \ldots (9).$$

Für die noch zu bestimmenden 4 Konstanten α, β, B, D hat man die Bedingungen, daß an einer — im Konvergenzgebiet beider Entwicklungen —, d. h. sowohl der von $J_{1/3, -1/3}$ als auch der von $H_{1/3}^{(1), (2)}$ liegenden Stelle $z = z_1$ sowohl die Potenzentwicklung vom Ursprung wie die asymptotische Entwicklung ein gleiches v^* und u^* ergeben müssen. Ferner müssen die Funktionswerte sowie die Tangenten der Kurven vom Nullpunkt (lineare Kombination von Φ_1 und Φ_2) mit den entsprechenden Werten der asymptotischen Kurve Φ_4 übereinstimmen.

Das gibt das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \alpha F_1 (z_1) + \beta F_2 (z_1) + z_1 - z_0 &= B F_4 (z_1) + D \\ \alpha F_1' (z_1) + \beta F_2' (z_1) + 1 &= B F_4' (z_1) \\ \alpha F_1'' (z_1) + \beta F_2'' (z_1) &= B F_4'' (z_1) \\ \alpha F_1''' (z_1) + \beta F_2''' (z_1) &= B F_4''' (z_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10).$$

Es ist:

$$v_\infty{}^* = k/i\, F(\infty).$$

Aus:

$$\frac{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\nu}} \bar{F}(z) = - u_0 (B F_4 + D)$$

ergibt sich, da $F_4 = 0$ für $z = \infty$,

$$\bar{F}(\infty) = - \frac{\sqrt{\nu}}{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}} u_0 \cdot D.$$

Mithin, unter Berücksichtigung von $\bar{u}_0 = C = i A$

$$v_\infty{}^* = \frac{\sqrt{\nu}}{\left(\frac{d U}{d \eta} k \sqrt{n}\right)^{1/3}} A \cdot k \cdot D.$$

Erweitert man mit:

$$\sqrt{-z_0} = \frac{1}{\left(\frac{d U}{d \eta} \cdot \frac{k}{n}\right)^{1/3}},$$

so ergibt sich:

$$v_\infty{}^* = - A \sqrt{-z_0} \cdot D \cdot k \sqrt{\nu/n}.$$

Bezeichnet man: $\sqrt{-z_0} \cdot D = p + i q$, so ist: $v_\infty{}^* = - A (p + i q) k \sqrt{\nu/n}$.

Für $-z_0$ kann man schreiben, um hierfür einen anschaulicheren Ausdruck zu gewinnen

$$-z_0 = \frac{1}{\left(\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{k}{n}\right)^{2/3}} = \frac{(n/k)^{2/3}}{\left(\frac{dU}{d\eta}\right)^{2/3}},$$

oder, da

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu/n}} = \frac{y}{\delta}$$

ist,

$$(-z_0)^{3/2} = \frac{U_0}{\delta\frac{dU}{d\eta}}$$

oder da

$$\frac{dU}{dy}\cdot\delta = U_{(\delta)}$$

$$(-z_0)^{3/2} = \frac{U^0}{U_{(\delta)}} \qquad \text{(11)},$$

d. h. man erhält für $(-z_0)^{3/2}$ den Quotienten zweier Geschwindigkeiten[1]).

Es ergibt sich also die Aufgabe, die komplexe Konstante D aus dem Gleichungssystem (10) zu berechnen.

Zu diesem Zweck wurde das obige Gleichungssystem für einzelne spezielle Werte von z_0 aufgestellt und nach D aufgelöst[2]).

Die erste Gleichung von (10) erhält man durch zweifache Integration der Besselschen bezw. Hankelschen Funktionen; die zweite Gleichung durch einfache Integration; die dritte Gleichung stellt eine lineare Kombination der Besselschen bezw. Hankelschen Funktion selbst dar; die vierte Gleichung ergibt sich durch Differentiation der Besselschen und Hankelschen Funktionen. Die Integration der Besselschen Funktionen geschah gliedweise, die der Hankelschen Funktion graphisch.

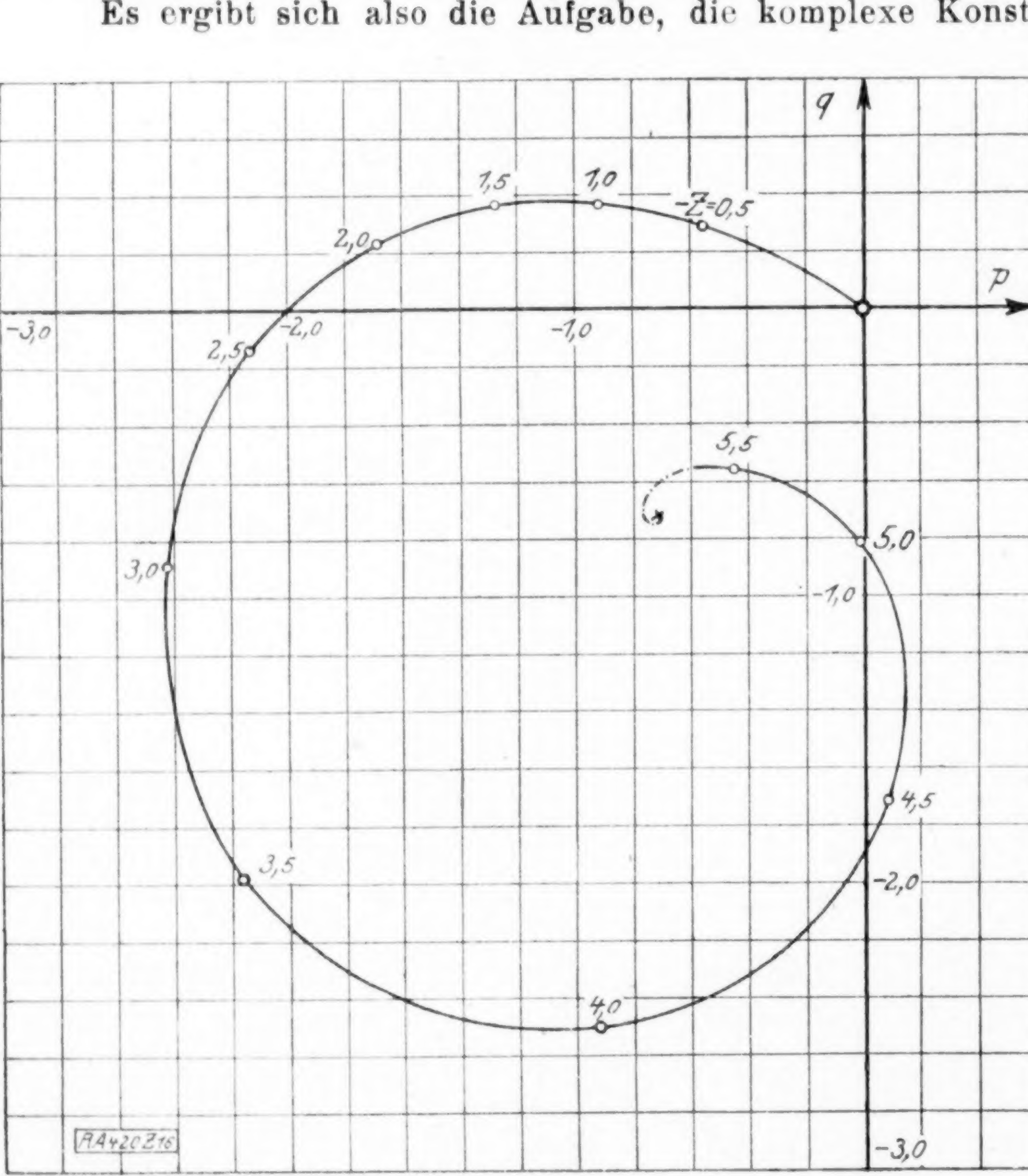


Abb. 16.

Abb. 16 zeigt das Resultat der numerischen Rechnung: den Zusammenhang von p und q mit z_0. (Vergl. die Zahlentafel am Schluß der Abhandlung).

Die Werte von $-z_0$ sind an die Kurve angeschrieben.

---

[1]) Berücksichtigt man, daß $n = f(kb_1)\frac{dU}{dy}$ ist, so wird nach (2) $-z_0 = f(kb_1)\sqrt[3]{\frac{dU}{dy}\frac{1}{\nu k^2}}$ oder mit $R = \frac{U\cdot b_1}{\nu} = \frac{dU}{dy}\cdot\frac{b_1^2}{\nu}$ $-z_0 = f(kb_1)\sqrt[3]{\frac{R}{(kb_1)^2}}$ (lauter dimensionslose Größen).

[2]) Die Rechnung wurde durchgeführt für die Werte: $-z_0 = 0;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 3{,}0;\ 3{,}5;\ 4{,}0;\ 4{,}5;\ 5{,}0;\ 5{,}5$.

Für den oben behandelten vereinfachten Fall U^0 relativ groß, hatte sich ergeben:

$$v_\infty^* = - A \frac{1+i}{\sqrt{2}} k \sqrt{\frac{\nu}{n}}.$$

Dieser Ausdruck muß sich in der jetzt durchgeführten allgemeinen Rechnung natürlich als Spezialfall wiederfinden.

Für großes U^0 d. h. nach (11) für großes $-z_0$ muß das v_∞^* der allgemeinen Rechnung nach dem der speziellen konvergieren, oder die p und q Kurve (als Funktion von $-z_0$) müssen den asymptotischen Wert $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ haben. Daß dieses der Fall ist, erkennt man aus der Zeichnung Abb. 16. Die Kurve ließ sich wegen der schlechten Konvergenz der Reihe für große $-z_0$ nicht weiter fortsetzen; doch zeigt das Polardiagramm, daß ein dringendes Bedürfnis zur Berechnung weiterer Punkte nicht vorliegt.

5. Einfluß auf die in 3 behandelten Geschwindigkeitsprofile. Es fragt sich jetzt, wie werden die in 3 erhaltenen Resultate sich ändern bei Benutzung dieses neuen Wertes von v_∞^*? Wird in gewissen Fällen Stabilität eintreten oder nicht? Es kommt natürlich wieder darauf an, den imaginären Teil von n_1, d. i. s_1 als Funktion von k zu untersuchen. Geht man mit dem neuen Wert von

$$v_\infty^* = - A(p + iq) k \sqrt{\frac{\nu}{n}}$$

in den Ansatz der Rechnung für die Profile Abb. 4 und 5, so erhält man:

Abb. 4 . . . . . $s_1 = q \frac{U\sqrt{\nu}}{b_1^2} \cdot e^{-2kb_1} \cdot \frac{kb_1}{\sqrt{n_0}}$ (Abb. 17),

» 5 . . . . . $s_1 = q \frac{U\sqrt{\nu}}{b_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}^2 kb_1}{\mathfrak{Cof}^2 2kb_1} \cdot \frac{kb_1}{\sqrt{n_0}}$ (» 18),

» 5 . . . . . $s_1 = q \frac{U\sqrt{\nu}}{4 b_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, 2kb_1}{\mathfrak{Cof}^2 kb_1} \cdot \frac{kb_1}{\sqrt{n_0}}$ (» 19).

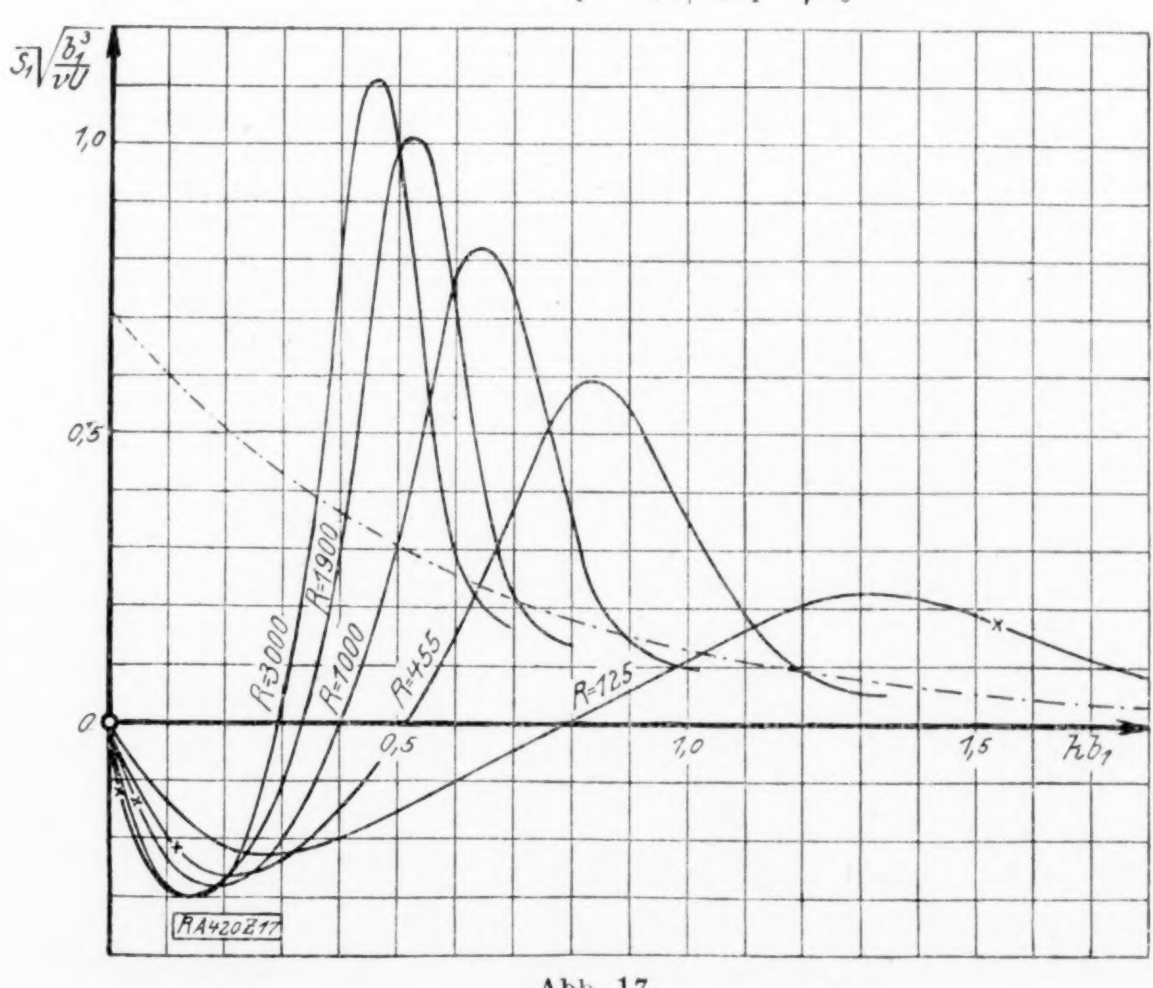


Abb. 17.

Es ist zu berücksichtigen, daß q für ein bestimmtes ν eine Funktion von k ist. Denn da q eine Funktion von z_0 ist und nach (2)

$$-z_0 = \frac{n_0}{\left(\frac{dU}{d\eta} k \sqrt{\nu}\right)^{2/3}}$$

ist, so ist für ein bestimmtes ν der Wert von q eine Funktion von $n_0/k^{2/3}$. Da ferner n_0 eine Funktion von $k\,b_1$ ist (vergl. Abb. 9, 10, 11), so ist für ein bestimmtes ν die Größe q eine Funktion von $k\,b_1$.

Setzt man $U = 1$ und $b_1 = 1$, so ist q auch für eine bestimmte Reynoldssche Zahl $R = \frac{U \cdot b_1}{\nu}$ eine Funktion von k.

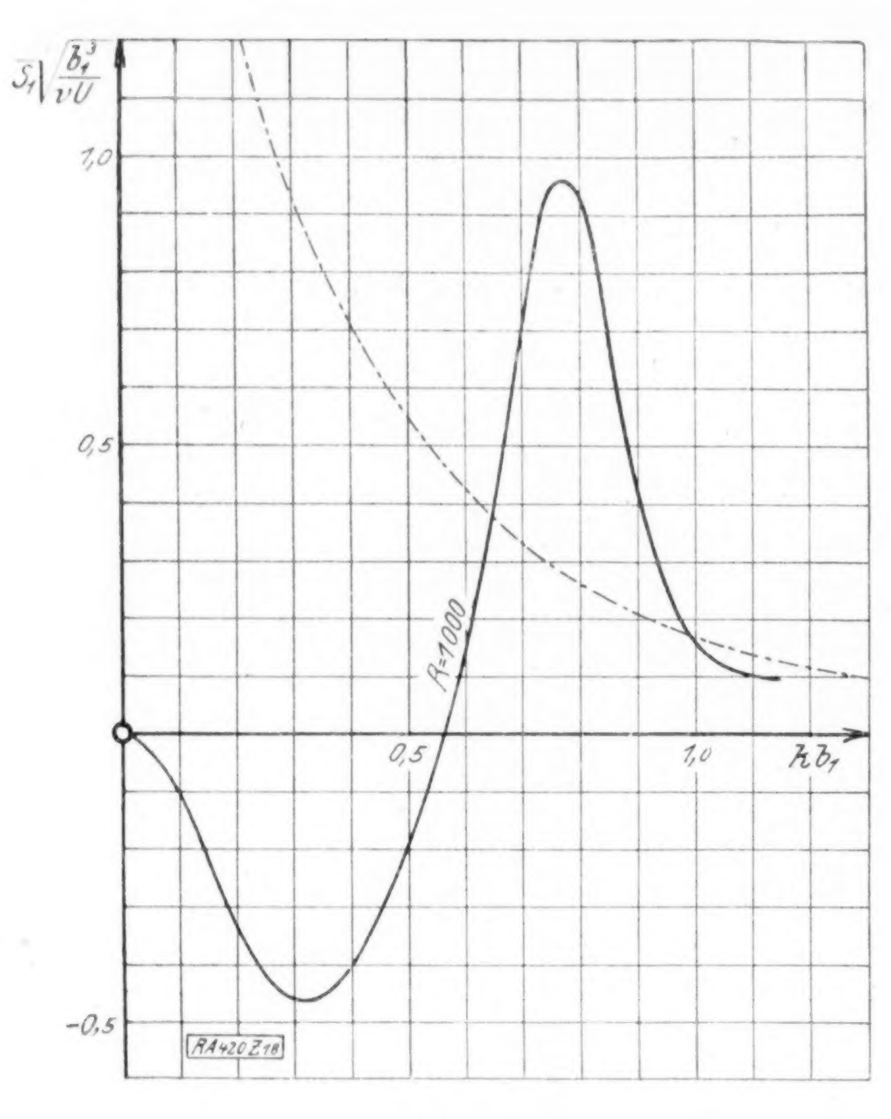


Abb. 18.

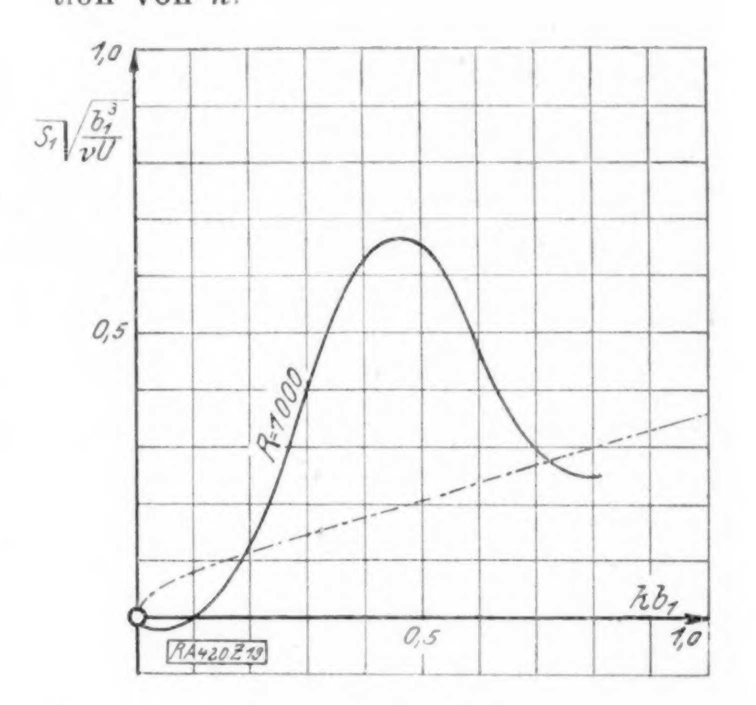


Abb. 19.

Der Zusammenhang von s_1 und k für eine Reihe Reynoldsscher Zahlen ist für die einzelnen gerechneten Geschwindigkeitsprofile auf Abb. 17, zugehörig zu Abb. 4 und Abb. 18 und 19, zugehörig zu Abb. 5, graphisch aufgetragen ($U = 1$, $b_1 = 1$).

Die Werte von s_1 nach der einfachen Theorie sind gestrichelt eingetragen. Sie geben tatsächlich die Grenze für große k, d. h. kleine Wellenlängen richtig wieder.

Man sieht zwar aus den Zeichnungen, daß für gewisse sehr große Wellenlängen (kleine k) s_1 negativ ist, d. h. eine Störung mit solcher Wellenlänge stabil ist und mit der Zeit abklingt, daß es aber für alle Reynoldsschen Zahlen immer Wellenlängen gibt, für die s_1 positiv ist, also für die Labilität herrscht. Da nun jede Wellenlänge als Störung auftreten kann, so ist das früher erhaltene Resultat durch die Verfeinerung der Theorie im wesentlichen nicht geändert: unter den gemachten Voraussetzungen ergibt die Methode der kleinen Schwingungen für alle Reynoldsschen Zahlen Labilität, d. h. die beobachtete Stabilität der Laminarströmung kann auf diesem Weg und unter diesen Voraussetzungen nicht erklärt werden. Es ist also an unseren Betrachtungen noch irgend etwas nicht in Ordnung. In diesem Zusammenhange muß noch auf einen wichtigen Umstand hinsichtlich der Gültigkeit der s_1-Kurven hingewiesen werden, darauf nämlich, daß die Kurven von einem bestimmten $k\,b_1$ an nach $k\,b_1 = 0$ hin fraglich werden (in der Zeichnung Abb. 17 durch ein $\times$ gekennzeichnet). Die folgende Rechnung zeigt, wie diese Gültigkeitsgrenze für unsere Rechnung gewonnen wird.

6. Die aus der allgemeinen Lösung folgenden Einschränkungen der Resultate. Eine wesentliche Voraussetzung der ganzen Untersuchung war die, daß innerhalb der Grenzschicht, in der die Zähigkeitswirkung zur Geltung kommt, dU/dy = konst. ist, d. h., innerhalb des ersten Streifens muß die Zusatzgeschwindigkeit, die das Haften an der Wand bewirkt, bereits vollständig abgeklungen sein. Abb. 20 zeigt den Verlauf des reellen und imaginären Anteils der Zusatzgeschwindigkeitskomponenten u^*. Bezeichnet, wie bisher, b_1 die Streifenbreite, so muß für solche y, bei denen die durch die Reibung bedingte Zusatzgeschwindigkeit u^* noch irgendwie merkliche Werte hat, $y/b_1 < 1$ sein. Diese Forderung ermöglicht es, eine untere Grenze des Gültigkeitsbereiches der s_1-Kurve festzulegen.

Nach (2) ergibt sich

$$y = \left(\frac{\nu}{\frac{dU}{dy}k}\right)^{1/3} \cdot (z - z_0);$$

also, da $dU/dy = U/b_1$ ist,

$$\frac{y}{b_1} = \frac{z - z_0}{\sqrt[3]{R\,k\,b_1}} < 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Setzt man fest, daß für $y = b_1$ der Betrag von u^* sich um höchstens 1 vH von dem Betrag der Störungsgeschwindigkeit überhaupt unterscheidet, so ist als obere Grenze

$$\left|\frac{u^*}{\bar{u}_0}\right| = 0{,}01.$$

Wir setzen, was praktisch nicht viel ausmacht,

$$\bar{u}_0 = \bar{u};$$

nach (8) in Verbindung mit (9) ist

$$\left|\frac{u^*}{\bar{u}_0}\right| = |B(z_0) \cdot F_4'(z)|.$$

$F_4'(z)$ wurde durch graphische Integration der Hankelschen Funktion bestimmt.

Aus

$$|B(z_0)| = \frac{0{,}01}{|F_4'(z)|}$$

ergibt sich dann eine Zuordnung von z_0 und z bzw. $z - z_0$ und z und damit für eine bestimmte Reynoldssche Zahl nach (12)

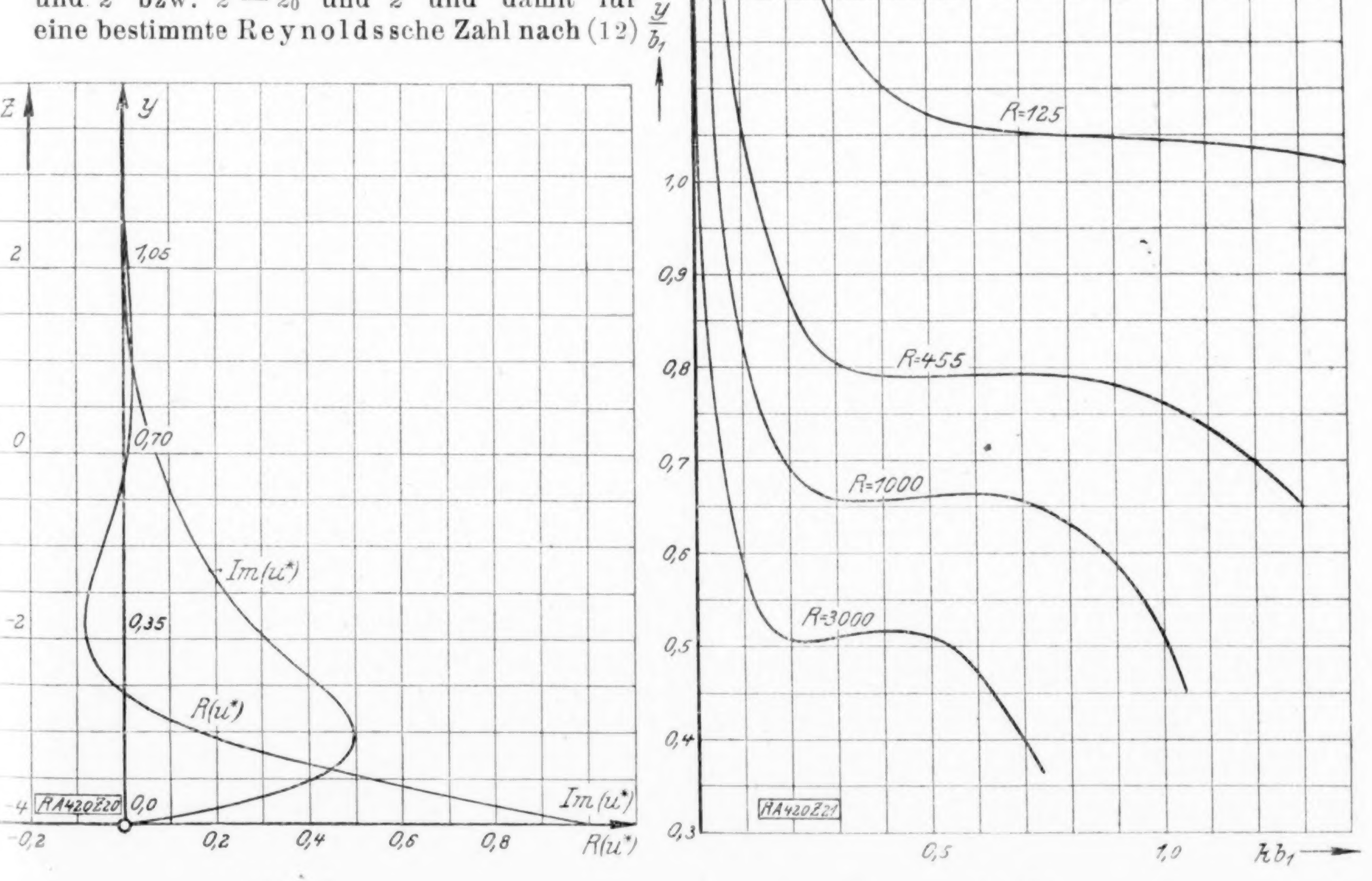


Abb. 20. Abb. 21.

eine Beziehung zwischen $z - z_0$ und $k\,b_1$, und daraus noch eine für y/b_1 und $k\,b_1$ nach Formel (12). Aus Abb. 21 ist für eine Anzahl Reynoldsscher Zahlen für den Fall von Abb. 4 der Zusammenhang von y/b_1 und $k\,b_1$ ersichtlich.

Die s_1-Kurven der Abb. 17 werden also von dem $k\,b_1$ an fraglich, wo das zu dem entsprechenden $k\,b_1$ gehörige $y/b_1 > 1$ ist; die Kurve, die zu $R = 125$ gehört, also nahezu ganz.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, ändert sich auch nach Behandlung des allgemeinen Falles nichts wesentliches an dem Resultat, das oben für den speziellen Fall

erhalten worden war Auch jetzt ist die beobachtete Stabilität der Laminarströmung nicht zu erklären, geschweige denn eine kritische Reynoldssche Zahl zu bestimmen. In zweierlei Beziehung sagt aber die allgemeine Rechnung mehr aus als die spezielle. Einmal ergibt sich für eine bestimmte Reynoldssche Zahl ein stark ausgeprägtes Maximum der s_1-Kurve, d. h. die Theorie gibt an, daß bei einer bestimmten Reynoldsschen Zahl eine Wellenlänge der Störung besonders günstig für die Entstehung und Ausbildung der Turbulenz ist. Vergl. hierzu die Zeichnung Abb. 22, auf der — wiederum für den Fall Abb. 4 — λ/b_1 als Funktion von R aufgetragen ist, für den Fall, daß s_1 ein Maximum ist.

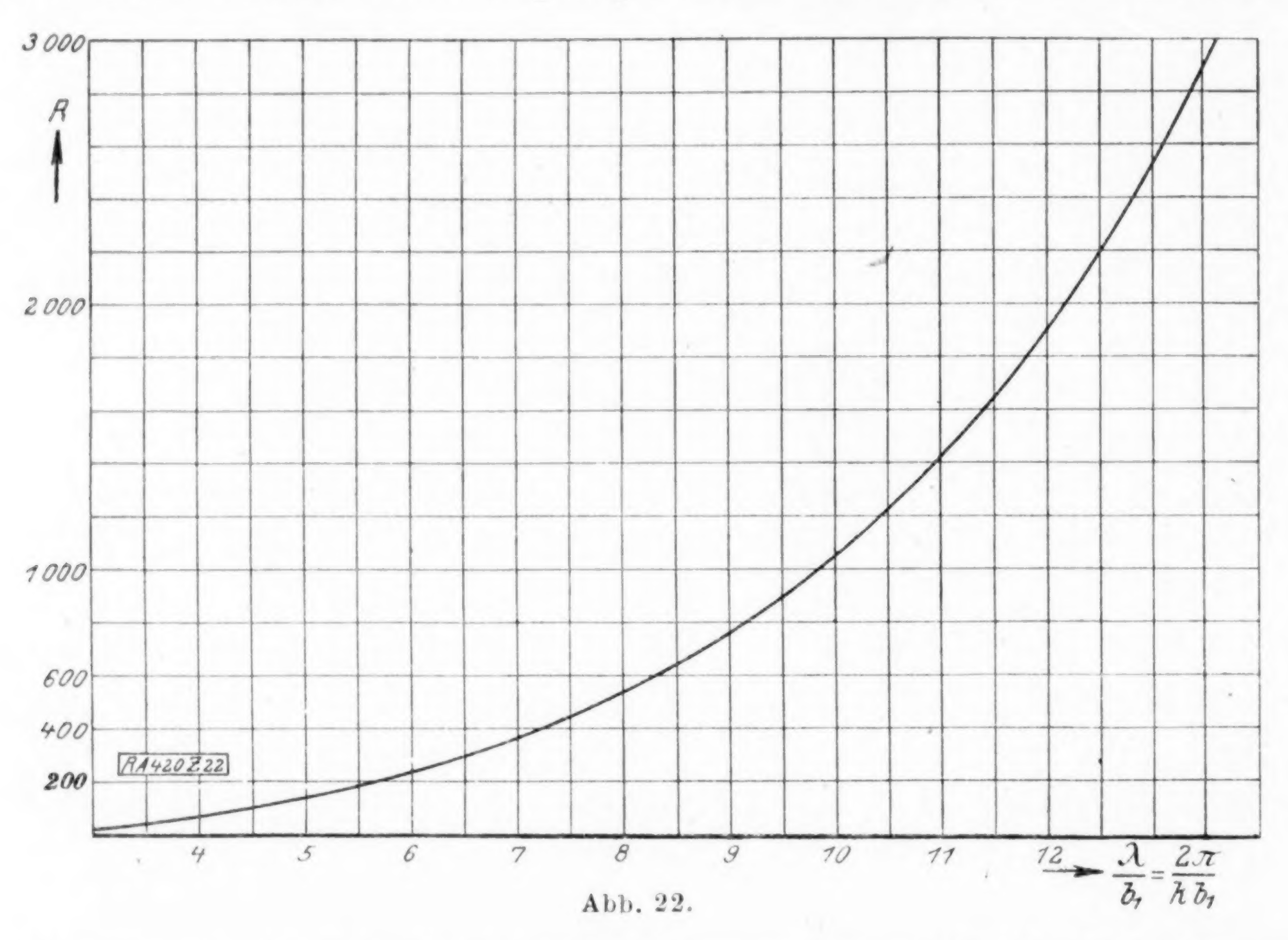


Abb. 22.

Zweitens wird der Gültigkeitsbereich des oben gewonnenen Resultates nicht unwesentlich eingeschränkt. Zwar wird auch jetzt eine negative Dämpfung, d. h. Anfachung der Störung, festgestellt, allein für kleine Reynoldssche Zahlen ($R = \frac{U \cdot b_1}{\nu}$ etwa unter 200)[1]) oder für sehr große Wellenlängen ist diese Rechnung nicht beweisend. Für diese Fälle läßt die Rechnung die Entscheidung, ob Anfachung oder Dämpfung, d. h. ob turbulente oder laminare Strömung sich einstellt, offen.

Wie ist nun das Ergebnis dieser Untersuchung mit den gerade entgegengesetzten der bisherigen Theorien in Einklang zu bringen?

Eine für die Vorgänge in der Grenzschicht wesentliche Voraussetzung ist, daß die Laminarströmung als reibungslose Flüssigkeit gedacht — der nicht konstanten Wirbelstärke wegen —, gewisse ungedämpfte Wellenbewegungen ausführen kann. Diese Voraussetzung ist beim Couetteschen Fall, der der theoretischen Erklärung der Turbulenz gewöhnlich zugrunde gelegt wird, nicht erfüllt.

Schwerwiegender als die Unstimmigkeit mit den Ergebnissen der bisherigen Theorien ist der Umstand, daß auch diese Rechnung nicht der Tatsache gerecht wird, daß unter einer kritischen Reynoldsschen Zahl von etwa 1000 keine turbulente Strömung eintritt.

Der Grund dafür, daß die in dieser Arbeit entwickelte Theorie in diesem wesentlichen Punkte versagt, kann nur darin liegen, daß die Voraussetzungen, auf die sich die Rechnung aufbaut, nicht dem wirklichen physikalischen Vorgang entsprechen. Besonders die Annahme des geknickten Geschwindigkeitsprofils der Hauptströmung wird man für das ungenügende Resultat verantwortlich machen können.

[1]) Dies würde in der gewöhnlichen Ausdrucksweise einer Reynoldsschen Zahl $R = \frac{U d}{\nu}$ von rund 800 entsprechen (wenn man etwa Abb. 5 zugrunde legt).

Legt man der Rechnung ein stetig gekrümmtes Geschwindigkeitsprofil zugrunde, so ergeben sich, wie schon **Rayleigh** bemerkt hat, an denjenigen Stellen, wo die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungswelle mit der Geschwindigkeit der Hauptströmung $\overline{U}$ übereinstimmt, für eine reibungslose Flüssigkeit singuläre Punkte, d. h. u wird beliebig groß. Das kommt daher, weil sich die dort befindlichen Flüssigkeitsteilchen dauernd in demselben Druckgefälle befinden. Für eine zähe Flüssigkeit bleiben zwar die Geschwindigkeiten endlich, können aber immerhin ziemlich groß werden. Nur eine wirkliche Durchrechnung der Schwingungen einer zähen Flüssigkeit für solche stetig gekrümmten Profile wird hierüber Klarheit verschaffen können.

7. Spezielles Beispiel und Vergleich mit einigen photographischen Aufnahmen der entstehenden Turbulenz. Zum Schluß ist noch für ein spezielles Beispiel die Geschwindigkeitsverteilung und das Stromlinienbild berechnet worden. Als laminare Hauptströmung ist ein Profil zugrunde gelegt, wie es sich in einem offenen Kanal von rechteckigem Querschnitt (15 cm breit, 25 cm tief) ergibt an der Stelle, wo die turbulente Strömung gerade im Entstehen begriffen ist. Das geschah ziemlich regelmäßig in einer Entfernung von etwa $l = 320$ cm vom abgerundeten Einlauf bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $\overline{U} = 12$ cm/sek.

Als kinematische Zähigkeit wurde der Wert $\nu = 0{,}0101\ \mathrm{cm^2/sek}$ angenommen. Diese speziellen Daten wurden deshalb gewählt, weil unter denselben Voraussetzungen eine Reihe photographischer Aufnahmen hergestellt wurde, mit denen dann die gerechneten Stromlinien verglichen werden sollten.

Mit Hilfe einer von H. **Blasius**[1]) abgeleiteten Beziehung läßt sich ein Zusammenhang zwischen der Entfernung vom Einlauf l und der Streifenbreite b_1 herstellen.

Die Kraft, die auf eine ebene Platte in der x-Richtung einwirkt, wenn sie parallel zu den Stromlinien einer mit der Geschwindigkeit $\overline{U}$ fließenden Strömung eingetaucht wird, beträgt pro Flächeneinheit:

$$P = \mu \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$$

und nach **Blasius**[1])

$$P = 0{,}332\, \varrho \sqrt{\nu\, \overline{U}^3}\, \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Setzt man andererseits statt des stetigen Geschwindigkeitsprofiles wie bisher den gebrochenen Linienzug, dessen erste Gerade von der Wand aus mit der Tangente an das stetige Profil im Punkte $y = 0$ zusammenfällt, so hat man:

$$P = \mu \frac{\overline{U}}{\delta}\,.$$

Mit der obigen Gleichung erhält man hieraus für $x = l$

$$\delta = b_1 = 3{,}02 \sqrt{\frac{l \cdot \nu}{\overline{U}}}.$$

Nimmt man als Näherungswert für das stetige Geschwindigkeitsprofil nicht das eben angegebene sondern ein gebrochenes Profil, das die Eigenschaft hat, außer der Form nach dem stetigen Kurvenzug möglichst angepaßt zu sein, auch noch mit ihm gleichen Flächeninhalt zu haben, so ändert sich — wie eine nähere Rechnung zeigt — die Konstante ein wenig, und man erhält:

$$b_1 = 3{,}46 \sqrt{\frac{l \cdot \nu}{\overline{U}}}.$$

In Verbindung mit den oben angenommenen Werten ergibt sich $b_1 = 1{,}8$ cm. Dem entspricht eine **Reynolds**sche Zahl bezogen auf die Streifenbreite b_1: $R = \frac{\overline{U} \cdot b_1}{\nu} = 2140$; bezogen auf den hydraulischen Radius: $R = \frac{\overline{U} \cdot r}{\nu}$[2]) $= 13000$.

[1]) H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten kleiner Reibung. Diss. Göttingen 1907, S. 15.

[2]) Der hydraulische Radius ist $r = \frac{2F}{u} = \frac{630}{57} = 11$ cm (F = Querschnitt der Wassermasse des Kanals; u = Umfang des Querschnittes, soweit er zur Benetzungsfläche gehört).

Da beim Entstehen der Turbulenz diejenige Wellenlänge wohl vorherrschen wird, die zeitlich am schnellsten anwächst, so wurde aus Zeichnung Abb. 17 durch Interpolation für $R = 2140$ $k\,b_1 = 0{,}507$ bestimmt, für das s_1 ein Maximum ist. Mithin $k = 0{,}278\ \mathrm{cm}^{-1}$. Als Wellenlänge der Störung ergibt sich also:

$$\lambda = 2\,\pi/k = 22{,}3\ \mathrm{cm}.$$

Dieselbe Wellenlänge ergibt sich natürlich auch aus Abb. 22. Die beobachteten Wellen sind meist wesentlich kürzer als die berechneten, was damit zusammenhängen kann, daß der Entstehungsort der Wellen stromaufwärts liegt, wo b_1 und $R = \frac{\overline{U} \cdot b_1}{\nu}$ kleiner sind.

Im folgenden wird nur der Vorgang an einer Wand behandelt. Da $\frac{\lambda}{2\,\pi} = 3{,}6$ cm relativ klein gegen den Durchmesser $d = 15$ cm ist, wird eine gegenseitige Beeinflussung der Wände wohl kaum von Bedeutung sein.

Es wird also ein Geschwindigkeitsprofil von der Form Abb. 4 zugrunde gelegt. Für den ersten bzw. zweiten Streifen setzen wir mit Rayleigh an:

$$v_I = A\,\mathfrak{Sin}\,k y + B\,\mathfrak{Cos}\,k y, \quad v_{II} = C e^{-k(y-b_1)}.$$

Daraus:

$$u_I = \frac{i}{k}\frac{\partial v_I}{\partial y}, \qquad u_{II} = \frac{i}{k}\frac{\partial v_{II}}{\partial y}, \qquad \text{wo} \quad B = -A\,(p + i q) k \sqrt{\frac{r}{n}}.$$

Durch sukzessive Approximation ergibt sich aus Gl. (6) $r = 1.31\ \mathrm{cm}^{-1}$ und $U^0 = \frac{r}{k} = 4{,}67\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}}$.

Aus (2) erhält man, da

$$\frac{d\,U}{d\,y} = \frac{\overline{U}}{b_1} = 6{,}67\ \mathrm{sek}^{-1}$$

ist, $z_0 = -4{,}0$ für $y = 0$ und aus Zeichnung Abb. 16 $p = 0{,}92$, $q = 2{,}50$.

Für u_0 wird aus zeichnerischen Gründen ein verhältnismäßig großer Wert $u_0 = \frac{\overline{U}}{10} = 1{,}2\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}}$ angenommen. Die Abhängigkeit der Störung in der x-Richtung ist gegeben durch den Faktor $e^{i k x}$. Für vier Phasen wurde $u = U + u + u^*$ als Funktion von y gerechnet und graphisch aufgetragen und zwar für $x = 0,\ \frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda}{4}$ und $\frac{3\,\lambda}{4}$.

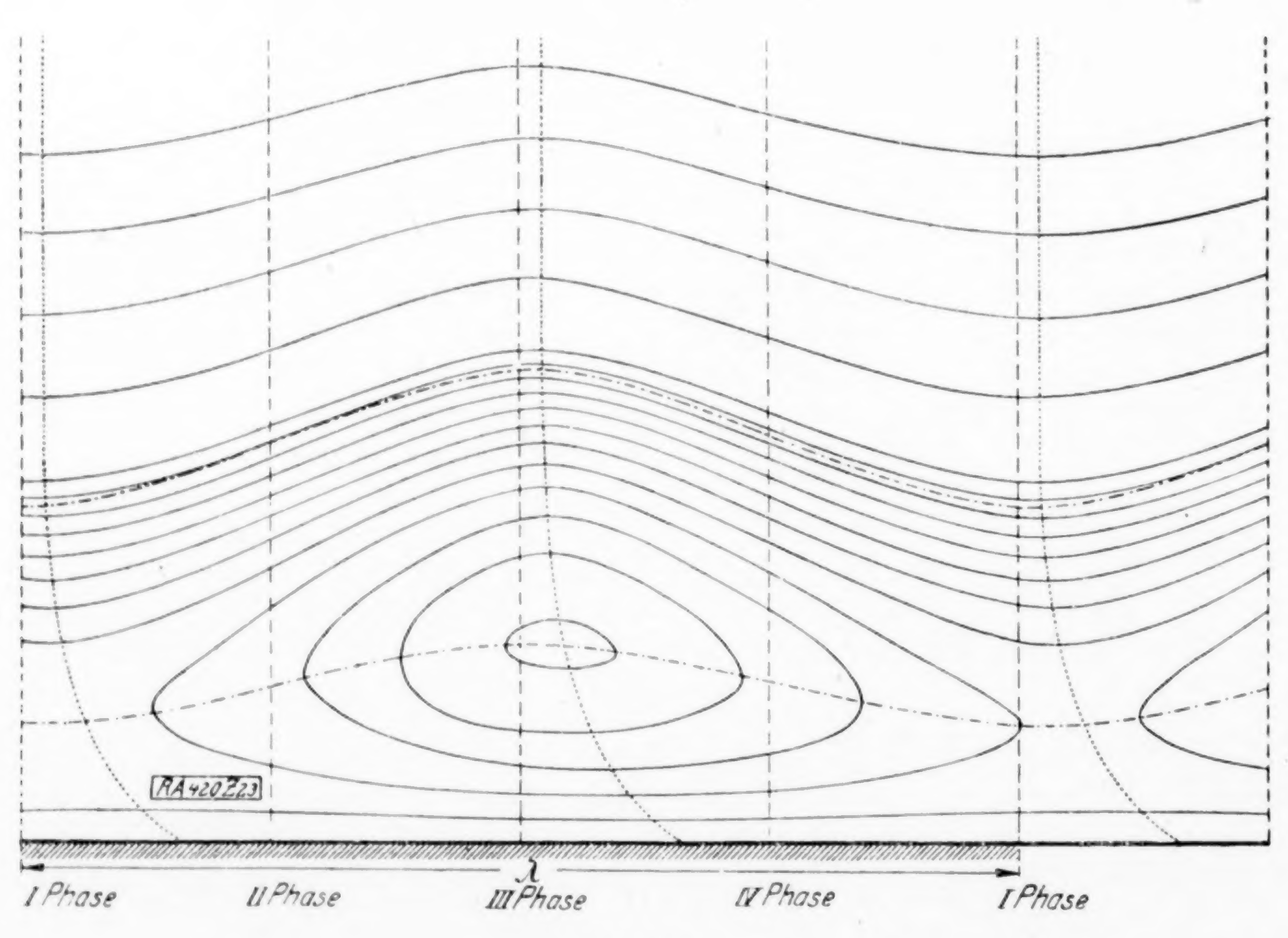
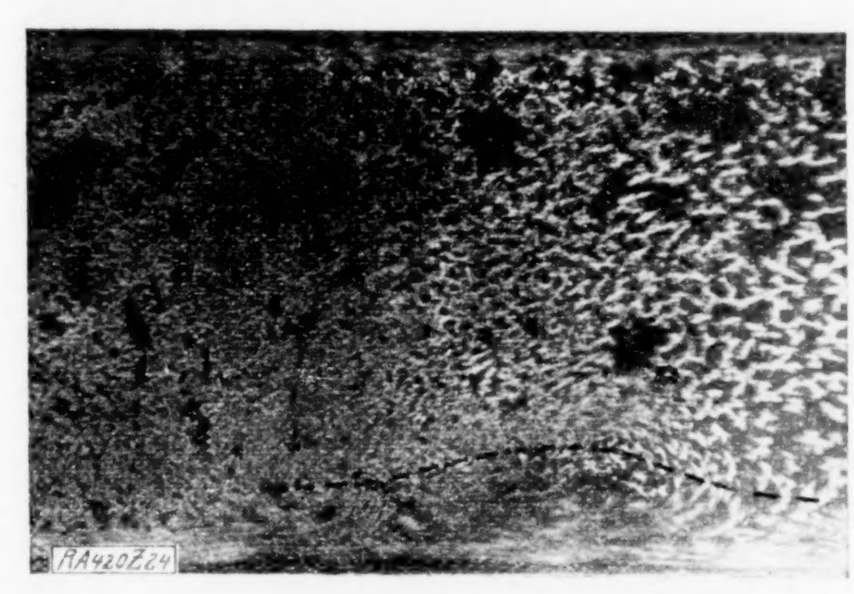
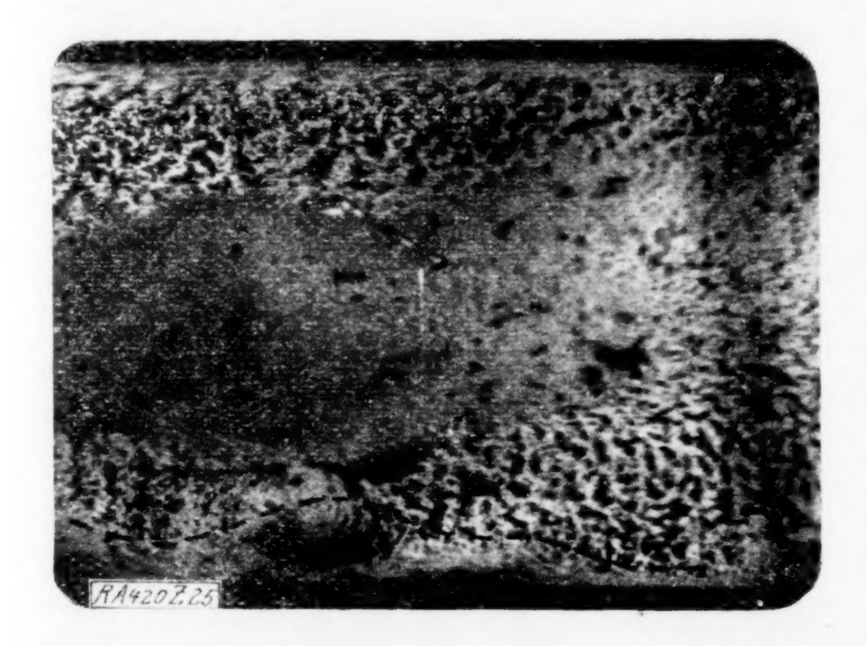


Abb. 23.

Als Stromlinien ergeben sich dann die Kurven $\psi = \text{const.}$, wo ψ die Strömungsfunktion ist, unter Berücksichtigung, daß die Wand selbst eine Stromlinie darstellt; und zwar wurden die Stromlinien gezeichnet, wie sie sich einem Beschauer darbieten, der sich mit der Phasengeschwindigkeit $U^0 = \frac{r}{k}$ mit der Flüssigkeit mitbewegt. In diesem Bezugssystem ist die Bewegung nämlich bis auf das langsame zeitliche Anwachsen der Störung stationär. Abb. 23 stellt das Stromlinienbild dar bei fünffacher Vergrößerung der y-Ordinate.

Zum Schluß sind noch einige photographische Aufnahmen beigefügt. Die Bilder zeigen Strömungen in einem Kanal, wie er oben kurz beschrieben worden ist. Die photographische Kamera befand sich auf einem Wagen, der parallel der Strömung auf Schienen bewegt werden konnte. Die Geschwindigkeit des Wagens variierte bei den verschiedenen Bildern etwa zwischen $^2/_5$ und $^4/_5$ der maximalen Geschwindigkeit in der Mitte des Kanals. Die durch aufgestreutes Lykopodium- oder Aluminiumpulver kenntlich gemachten Teilchen der Wasseroberfläche, die die Geschwindigkeit des Wagens besitzen,







erscheinen also als Punkte. Alle anderen Teilchen erscheinen als Striche. Die Belichtung erfolgte durch eine elektrisch gezündete Mischung von Magnesium-Blitzlicht- und Zeitlichtpulver. Die Dauer betrug etwa $^1/_5$ Sekunde. Die Richtung der Geschwindigkeit der Strömung ist auf den Bildern von links nach rechts.

420

$-Z_0$	a	D	p	iq
0	$0{,}3778 + i\,0{,}6716$	$0{,}702 - i\,0{,}425$	0,000	0,000
0,5	$0{,}3372 + i\,0{,}3680$	$0{,}785 - i\,0{,}411$	0,555	− 0,291
1,0	$0{,}2583 + i\,0{,}2137$	$0{,}920 - i\,0{,}389$	0,920	− 0,389
1,5	$0{,}1899 + i\,0{,}1421$	$1{,}043 - i\,0{,}297$	1,278	− 0,364
2,0	$0{,}1320 + i\,0{,}1128$	$1{,}206 - i\,0{,}147$	1,705	− 0,208
2,5	$0{,}0819 + i\,0{,}1031$	$1{,}357 + i\,0{,}108$	2,144	+ 0,171
3,0	$0{,}0331 + i\,0{,}0972$	$1{,}400 + i\,0{,}515$	2,424	0,892
3,5	$-0{,}01483 + i\,0{,}08003$	$1{,}180 + i\,1{,}130$	2,210	2,11
4,0	$-0{,}04636 + i\,0{,}03260$	$0{,}460 + i\,1{,}250$	0,920	2,50
4,5	$-0{,}03136 - i\,0{,}00897$	$-0{,}0405 + i\,0{,}8080$	− 0,086	1,72
5,0	$-0{,}006518 - i\,0{,}014550$	$0{,}0057 + i\,0{,}3645$	0,0127	0,812
5,5	$+0{,}002964 - i\,0{,}006713$	$0{,}1913 + i\,0{,}2393$	0,448	0,560

15

Die Knicksicherheit von Fachwerken.

Von **R. v. MISES** in Berlin und **J. RATZERSDORFER** in Breslau.

Im folgenden wird die erste der drei Arbeiten vorgelegt, die als Ausführung der von v. Mises in seinem Marburger Vortrag entwickelten Stabilitätstheorie angekündigt wurden[1]. Es handelt sich dabei zunächst um die Berechnung der Stabilitätsgrenzen für ideale Fachwerke (mit reibungslosen Gelenken), also um die Bestimmung ihrer Tragfähigkeit bei gewissen Arten der Belastung. In den ersten fünf Abschnitten wird die Ableitung der Knickgleichung in ausführlicherer Darstellung als in dem Marburger Vortrag und mit Ergänzungen nach verschiedenen Richtungen hin gegeben. Hierauf folgt zur Erläuterung der Theorie in den Abschnitten **6** bis **8** die Besprechung des einfachsten ebenen und räumlichen »Schulbeispiels«. Der in **9** behandelte Fachwerkbinder leitet zum Gitterträger über, dessen für die Praxis wichtige Durchrechnung in den Abschnitten **10** bis **12** ausführlich gegeben wird. Die hier gewonnenen Schlußformeln stimmen mit den in dem Marburger Vortrag kurz skizzierten überein. Schließlich wird im letzten Abschnitt eine Bemerkung über das sogenannte seitliche Ausknicken ebener Fachwerkträger hinzugefügt, wobei ein in der Ebene gegebenes Stabsystem als Raumfachwerk aufgefaßt wird. Wir glauben, daß mit der vorstehenden Veröffentlichung jedermann die Möglichkeit gegeben wird, alle in der Praxis auftretenden Fragen über die Knicksicherheit idealer Fachwerke grundsätzlich mühelos zu lösen.

Text und Abbildungen sind nach einem Entwurf von R. v. Mises von J. Ratzersdorfer ausgeführt worden; die Abschnitte **8** und **13** stammen auch im Entwurf von dem letztgenannten Verfasser.

1. Die Knickgleichung bei ebenen Fachwerken. Wir betrachten ein ebenes System, ein Tragwerk, von k Punkten oder »Knoten«, die durch s gerade Linien oder »Stäbe« miteinander verbunden sind und (skalar gezählt) $m < 2k$ Bewegungsbeschränkungen oder »Auflagerbedingungen« unterworfen werden. Angenommen ist, daß das System eine »natürliche« Lage besitzt, bei der weder äußere noch innere Kräfte wirksam sind. Bekannt seien von jedem Stab die in diesem Zustand vorhandene »natürliche Länge« l und das Produkt aus dem Elastizitätsmodul (Youngschen Modul) E des Stabmaterials in die Querschnittsfläche F des Stabes. E ist entweder konstant oder es ist sein »augenblicklicher« Wert gegeben.

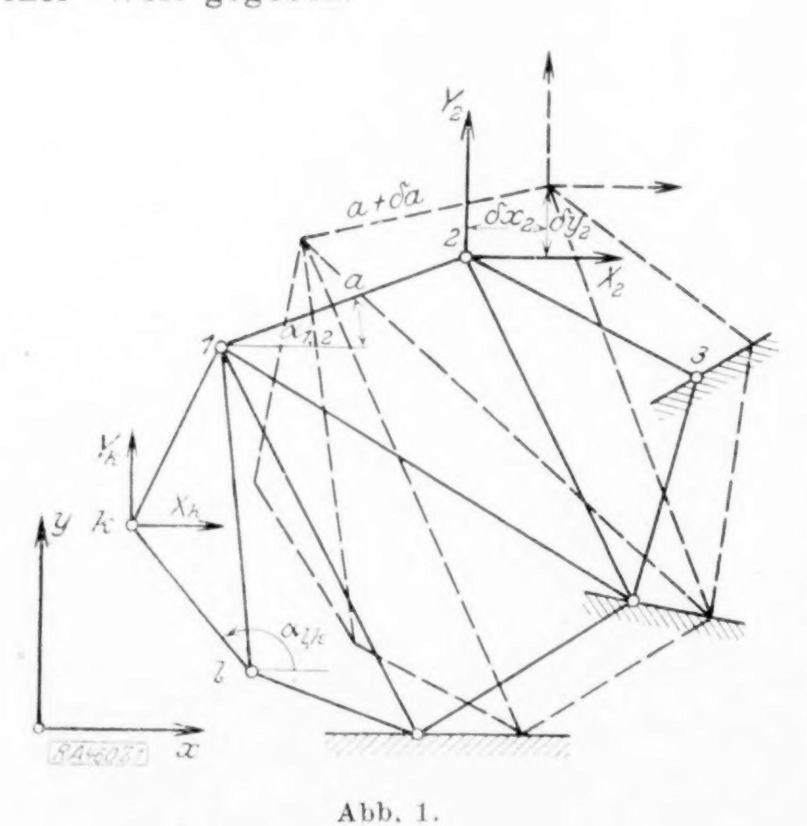


Abb. 1.

Haben in irgend einem verzerrten Zustand des Systems, der aber mit den Auflagerbedingungen verträglich ist, die einzelnen Stäbe die Längen a, so wirkt in jedem Stab eine Kraft von der Größe

$$S = E\,F\frac{a-l}{l} \quad . \quad . \quad (1),$$

wobei eine Zugkraft positives Vorzeichen besitzt. Wir beziehen jetzt für unsere Rechnung das System auf ein Cartesisches Koordinatensystem x, y und benennen mit $\alpha_{\iota\varkappa}$ den Winkel zwischen dem Stab $\iota\varkappa$ und der x-Achse; der Winkel wird hierbei von der positiven x-Achse im Gegenuhrzeigersinn zum Stab gezählt (Abb. 1). Um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten muß an dem $\varkappa$-ten Knoten eine äußere Kraft angreifen, deren rechtwinkelige Komponenten $X_\varkappa$, $Y_\varkappa$ mit den Stabkräften durch die Gleichungen

$$\sum_\iota S_{\iota\varkappa} \cos\alpha_{\iota\varkappa} = X_\varkappa\,, \qquad \sum_\iota S_{\iota\varkappa} \sin\alpha_{\iota\varkappa} = Y_\varkappa$$

verknüpft sind. Unter Benutzung von (1) kann man hierfür auch schreiben:

$$\sum_\iota \left[E\,F\frac{a-l}{l}\cos\alpha\right]_{\iota\varkappa} - X_\varkappa = 0\,, \qquad \sum_\iota \left[E\,F\frac{a-l}{l}\sin\alpha\right]_{\iota\varkappa} - Y_\varkappa = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

[1] Diese Zeitschr. 3 (1923), S. 406.

(für $\varkappa = 1, 2 \ldots k$). Die Summe erstreckt sich über alle Indizes ι, die den mit dem $\varkappa$-ten Knoten verbundenen Stäben entsprechen. Setzt man für die nicht bestehenden Verbindungen $F_{\iota\varkappa} = 0$, so kann man sich die Summation auch einheitlich von $\iota = 1$ bis k ausgedehnt denken. Man kann $2k$ Gleichungen der Form (2) aufstellen, die bei gegebener Lage aller Knotenpunkte sämtliche äußeren Kräfte, die m Auflagerkräfte und die $2k - m$ Lastgrößen bestimmen. Wir wollen nun unter dem »reduzierten System« der Gl. (2) die $2k - m$ Gleichungen verstehen, die übrig bleiben, wenn man die die Auflagerkräfte enthaltenden fortläßt. (Da die Koordinatenrichtungen für jeden Knoten beliebig gewählt werden dürfen, kann man dort, wo eine einfache Bewegungsbeschränkung vorliegt, die eine Koordinatenrichtung parallel der Bewegungsnormalen wählen und die zugehörige Gleichgewichtsbedingung fortlassen). Sog. »elastische« Auflager denken wir uns durch Stäbe ersetzt, die in das System einbezogen werden. Jedenfalls läßt sich erreichen, daß $2k - m$ Gleichungen, die nur Lasten, nicht Auflagergrößen enthalten, übrig bleiben.

Zu jedem verzerrten Zustand gibt es nun nur ein System von Kräften, mit denen sich das Tragwerk im Gleichgewicht befindet, während das Umgekehrte, daß zu einem Kräftesystem nur ein verzerrter Zustand gehört, keineswegs behauptet werden kann. Wir nennen einen beliebigen verzerrten Zustand mit den zugehörigen äußeren Kräften eine »Gleichgewichtsfigur«.

Um die Stabilität einer bestimmten Gleichgewichtsfigur zu untersuchen, erteilen wir jedem Knoten, soweit es die Auflagerbedingungen zulassen, unendlich kleine Verschiebungen δx, δy. Bei der oben angedeuteten Achsenwahl wird erzielt, daß m von diesen Verschiebungsgrößen Null werden, während die übrigen $2k - m$ willkürlich bleiben. Dabei verändern sich die Längen a um δa, die Winkel α um $\delta \alpha$ und man erhält aus den Gleichungen

$$a_{\iota\varkappa}^2 = (x_\varkappa - x_\iota)^2 + (y_\varkappa - y_\iota)^2, \qquad \operatorname{tg} \alpha_{\iota\varkappa} = (y_\varkappa - y_\iota) : (x_\varkappa - x_\iota)$$

durch Differentiation (bzw. direkt durch bekannte einfache Ueberlegungen):

$$\left.\begin{aligned} \delta a_{\iota\varkappa} &= \delta (x_\varkappa - x_\iota) \cos \alpha_{\iota\varkappa} + \delta (y_\varkappa - y_\iota) \sin \alpha_{\iota\varkappa} \\ \text{und} \qquad a_{\iota\varkappa}\, \delta \alpha_{\iota\varkappa} &= - \delta (x_\varkappa - x_\iota) \sin \alpha_{\iota\varkappa} + \delta (y_\varkappa - y_\iota) \cos \alpha_{\iota\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Bestimmt man jetzt für die Stablängen $(a + \delta a)$ nach (2) die Stabkräfte und setzt sie unter den Winkeln $\alpha + \delta \alpha$ in den Knoten zusammen, so bekommt man die neuen Kräfte $X + \delta X$ bzw. $Y + \delta Y$, die erforderlich wären, den neuen Zustand aufrecht zu erhalten. Wir nehmen hierbei an, daß $\delta X_\varkappa = \delta Y_\varkappa = 0$ sind, d. h. daß die äußeren Lasten an Größe und Richtung unverändert mit ihren Angriffspunkten mitgehen. Die Gleichungen, die erfüllt sein müssen, damit die neue Figur mit den alten Kräften eine Gleichgewichtsfigur bildet, gewinnt man, wenn man die linken Seiten von (2) nach den Regeln der Differentialrechnung »variiert«, d. h. statt $\sin \alpha$ jetzt $\cos \alpha \cdot \delta \alpha$, statt a jetzt δa schreibt u. s. f.:

$$\left.\begin{aligned} \sum_\iota \left[- E F \frac{a - l}{l} \sin \alpha\, \delta a + E F \frac{\delta a}{l} \cos \alpha \right]_{\iota\varkappa} &= 0 \\ \sum_\iota \left[E F \frac{a - l}{l} \cos \alpha\, \delta \alpha + E F \frac{\delta a}{l} \sin \alpha \right]_{\iota\varkappa} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

Der erste Teil in der Summe rührt von der Drehung $\delta \alpha$, der zweite Teil von der Längenänderung δa her. Die Anzahl dieser Gleichungen (4) ist $2k - m$. Führt man in die Gl. (4) für $\delta \alpha$ und δa die Ausdrücke (3) ein, so gewinnt man $2k - m$ lineare, homogene Gleichungen für die $2k - m$ unabhängigen Verrückungen δx, δy. Die gleich Null gesetzte Koeffizienten-Determinante dieses Gleichungssystems nennen wir die Knickgleichung.

Benützt man das System der nicht reduzierten $2k$ Gleichungen, so sind noch m Gleichungen vorhanden, die die Werte δX, δY für die Auflagerkräfte enthalten. Man kann entweder jetzt diese eliminieren oder auch mit dem nicht reduzierten System weiter rechnen.

Es ist zu beachten, daß bei unserem Ansatz von der Kleinheit der Formänderungen oder Verschiebungen kein Gebrauch gemacht wurde. Die Differenzen $a - l$ sind endliche Werte, die in der Gl. (2) auftretenden Winkel α sind exakt die Winkel der Stäbe in der verzerrten Gleichgewichtslage. Im Ergebnis unserer Rechnungen kann wohl gelegentlich angenähert $a = l$ angenommen werden. Die Werte δa, δx, δy sind hingegen im strengen Sinne unendlich kleine Größen.

2. Die Knickgleichung bei Raumfachwerken. Das in **1** beschriebene allgemeine Verfahren ist mit wenigen Aenderungen auf den dreidimensionalen Fall übertragbar. Gegeben sind bei einem Raumfachwerk k Knoten, s Stäbe und $m < 3k$ Auflagerbedingungen.

An Stelle der Gl. (2) treten Ansätze mit den drei Richtungscosinussen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bezüglich der drei Koordinatenachsen x, y, z.

$$\left.\begin{aligned}\sum_\iota\left[EF\frac{a-l}{l}\cos\alpha\right]_{\iota\varkappa}-X_\varkappa&=0\\ \sum_\iota\left[EF\frac{a-l}{l}\cos\beta\right]_{\iota\varkappa}-Y_\varkappa&=0\\ \sum_\iota\left[EF\frac{a-l}{l}\cos\gamma\right]_{\iota\varkappa}-Z_\varkappa&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2').$$

Statt der Gleichungen (3) hat man die Ausdrücke

$$\delta a_{\iota\varkappa}=\delta(x_\varkappa-x_\iota)\cos\alpha_{\iota\varkappa}+\delta(y_\varkappa-y_\iota)\cos\beta_{\iota\varkappa}+\delta(z_\varkappa-z\,)\cos\gamma_{\iota\varkappa}$$

$$\left.\begin{aligned}a_{\iota\varkappa}\,\delta(\cos\alpha_{\iota\varkappa})&=\delta(x_\varkappa-x_\iota)-\cos\alpha_{\iota\varkappa}\cdot\delta a_{\iota\varkappa}\\ a_{\iota\varkappa}\,\delta(\cos\beta_{\iota\varkappa})&=\delta(y_\varkappa-y_\iota)-\cos\beta_{\iota\varkappa}\cdot\delta a_{\iota\varkappa}\\ a_{\iota\varkappa}\,\delta(\cos\gamma_{\iota\varkappa})&=\delta(z_\varkappa-z_\iota)-\cos\gamma_{\iota\varkappa}\cdot\delta a_{\iota\varkappa}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(3'),$$

wobei man z. B. die zweite Gleichung am einfachsten aus der Beziehung $\delta(x_\varkappa-x_\iota) = \delta(a\cos\alpha) = a\,\delta(\cos\alpha)+\cos\alpha\,\delta a$ gewinnt.

Die Gleichungen (4), deren gleich Null gesetzte Determinante die Knickgleichung genannt wird, lauten jetzt:

$$\left.\begin{aligned}\sum_\iota\left[EF\frac{a-l}{l}\,\delta(\cos\alpha)+EF\frac{\delta a}{l}\cos\alpha\right]_{\iota\varkappa}&=0\\ \sum_\iota\left[EF\frac{a-l}{l}\,\delta(\cos\beta)+EF\frac{\delta a}{l}\cos\beta\right]_{\iota\varkappa}&=0\\ \sum_\iota\left[EF\frac{a-l}{l}\,\delta(\cos\gamma)+EF\frac{\delta a}{l}\cos\gamma\right]_{\iota\varkappa}&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(4'),$$

wobei die δa und $\delta(\cos\alpha)$ usf. mit Hilfe von (3') durch die δx, δy, δz auszudrücken sind. Das ebene Fachwerk mit ebener Deformation ist nur der räumliche Fall mit den zusätzlichen Bedingungen $\delta z = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

3. Die Knickgleichung im Sonderfall eines statisch bestimmten ebenen oder räumlichen Fachwerks. Sind für die Gleichgewichtsfigur, deren Stabilität untersucht werden soll, die Stabkräfte bekannt, so kann man sie zur Vereinfachung in Gl. (4) für $EF\frac{a-l}{l}$ einführen. Ein besonders bequemer Ansatz ergibt sich aber bei statisch bestimmten Fachwerken. Man ermittelt, nach irgend einem der üblichen Verfahren, die Stabkräfte S für die Gleichgewichtsfigur und dann die Stabkraft S' nach der Verschiebung, indem man die neuen Winkel der Stäbe der Berechnung zugrunde legt. Der Ausdruck $\delta S = S' - S$ ist nun linear und homogen in den δx, δy und dem Ansatz (4) ist das System der $2k-3$ Gleichungen

$$\left[\delta S - EF\frac{\delta a}{l}\right]_{\iota\varkappa} = 0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5),$$

in denen natürlich für δa wieder die Ausdrücke aus (2) zu setzen sind, gleichwertig. Inhaltlich besagt (5) dasselbe wie (4), der Unterschied ist rein formal, da hier Gleichungen für jeden Stab, dort für jeden Knoten aufgestellt werden. Die Beschränkung der Gl. (5) auf statisch bestimmte Fachwerke rührt daher, daß bei statisch unbestimmten Systemen die Spannungen nicht unabhängig von den Verschiebungen aus den Stabwinkeln berechnet werden können. Bildet man die Determinante der Gl. (5) und setzt sie gleich Null, so erhält man die Knickbedingung. Wie sich das Verfahren im einzelnen gestaltet, wird später gezeigt.

4. Begriff der Stabilität und Bedeutung der Knickgleichung. Eine Gleichgewichtsfigur heißt »stabil«, wenn zu jeder unendlich kleinen, mit den Auflagerbedingungen verträglichen Verschiebung ein positiver Arbeitsaufwand gehört. Man bezeichnet sie (gegen gewisse Störungen) als instabil, wenn es auch nur eine solche Verschiebungs-

möglichkeit gibt, die ohne Arbeitsaufwand oder unter Arbeitsgewinn vor sich geht. Endlich kann man eine Gleichgewichtsfigur »indifferent« nennen, wenn jede Verschiebung ohne Arbeitsaufwand erfolgt. So ist z. B. ein schwerer Körper im tiefsten Punkt einer Schale im stabilen, auf dem Scheitel einer Kuppe im instabilen, auf einer horizontalen Ebene im indifferenten Gleichgewicht. Ebenso steht ein schweres Prisma (gegen Kippen) stabil auf dem Tisch, ein Ei instabil, weil im ersten Fall ein Heben, im zweiten ein Senken des Schwerpunktes mit der Störung verbunden ist.

Wir wollen jetzt und im folgenden Abschnitt, der einfachen Schreibweise halber, nur vom ebenen Fachwerk sprechen, selbstverständlich haben aber alle Ueberlegungen auch für das räumliche System Geltung.

Die Größe der zur Verschiebung δx, δy erforderlichen Arbeit erhält man, wenn man jede der Gleichungen (4) der Reihe nach mit den ihr entsprechenden Verschiebungsgrößen δx_1, δy_1, δx_2, $\delta y_2 \ldots$ multipliziert und dann addiert. Denn die linken Seiten der Gl. (4) stellen ja die Kraftgrößen dar, die, abgesehen von den Kräften X_1, Y_1, X_2, $Y_2 \ldots$, notwendig wären, um das Stabwerk in den neuen Zustand zu bringen, die Arbeit der X_1, Y_1, X_2, $Y_2 \ldots$ ist jedoch Null. Wir können aber auch anders vorgehen. Die Formänderungsarbeit oder das elastische Potential für die Gleichgewichtsfigur ist

$$U = {}^1/_2 \sum_{\iota\varkappa} \left[\frac{EF}{l}(a-l)^2\right]_{\iota\varkappa} - L = A - L \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

wobei sich die Summe über alle Stäbe erstreckt und L die Arbeit der äußern Kräfte

$$L = \sum_{\varkappa} (X_\varkappa x_\varkappa + Y_\varkappa y_\varkappa) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

bedeutet. Die rechte Seite von (6) ist aufzufassen als Funktion der $2k - m$ freien Koordinaten x, y (die auch in den a stecken), und dabei sind nach (3)

$$\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial x_\varkappa} = \cos \alpha_{\iota\varkappa}, \qquad \frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial y_\varkappa} = \sin \alpha_{\iota\varkappa} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Beim Uebergang zu einer Nachbarfigur ist die Verzerrungsarbeit

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \ldots {}^1/_2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \delta x_1^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} \delta y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \cdot \partial y_1} \delta x_1 \cdot \delta y_1 + \ldots\right] \quad (9)$$

aufzubringen. Nun ist der Inhalt des Prinzips der virtuellen Arbeiten der, daß für jede Gleichgewichtsfigur

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial A}{\partial y_1} = \frac{\partial L}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial A}{\partial y k} = \frac{\partial L}{\partial y k}.$$

Da $U = A - L$, ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial U}{\partial x_\varkappa} = \sum_{\iota} \left[\frac{EF}{l}(a-l)\cos\alpha\right]_{\iota\varkappa} - X_\varkappa = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y_\varkappa} = \sum_{\iota} \left[\frac{EF}{l}(a-l)\sin\alpha\right]_{\iota\varkappa} - Y_\varkappa = 0,$$

also mit der Gleichgewichtsbedingung (2). Mit anderen Worten: eine unendlich kleine Verrückung aus dem durch (2) gekennzeichneten Gleichgewichtszustand erfolgt in erster Näherung arbeitslos. Man muß demnach, um zu bestimmen, ob δU positiv ist, die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigen, die in (9) schon mit angeschrieben wurden. Für die Lasten X, Y gibt es solche Glieder nicht, da L in x und y linear ist. (Darin liegt die Annahme, daß die X und Y parallel und der Größe nach unverändert bei der Verzerrung mitgenommen werden). Die Glieder zweiter Ordnung in (9) lassen sich bis auf den Faktor $^1/_2$ in der Form anschreiben:

$$\begin{aligned} &\delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots\right] \\ &+ \delta y_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\ldots\ldots\ldots\right] \quad \ldots \quad (9'), \\ &+ \delta x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\ldots\ldots\ldots\right] \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}$$

wobei das Differentiationszeichen vor der Klammer sich nur auf die ersten Faktoren jedes Summanden, nicht auf die δx, δy bezieht.

Der immer gleiche Klammerausdruck stimmt mit den Gliedern erster Ordnung von δU überein und mag etwa $\delta_1 U$ heißen. Der ganze Ausdruck (9') ist homogen vom

zweiten Grad in den Verrückungen δx, δy. Ein quadratisches Glied wie $\delta x_1{}^2$ kommt nur einmal vor, und zwar mit dem Koeffizienten $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1{}^2}$; die gemischten Glieder erscheinen zweimal mit dem gleichen Koeffizienten, z. B. $\delta x_1\, \delta y_1$ in der ersten Zeile an zweiter Stelle und in der zweiten Zeile an erster Stelle, jedesmal multipliziert mit $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial y_1}$. Wir behaupten nun: die Koeffizienten der Gleichungen (4), nachdem man in sie δx, δy als Variable eingeführt hat, müssen identisch sein mit den Elementen der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial y_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial x_2} \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y_1\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_1{}^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_1\, \partial x_2} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

die aus den Koeffizienten von (9') gebildet ist. Man sieht dies wie folgt ein.

Bezeichnen wir für den Augenblick die linke Seite der ersten Gl. (2) mit G_1, so war die erste Gl (4) so entstanden, daß die Veränderung δG_1, die G_1 durch die Verrückungen δx, δy erfährt, gebildet und dann gleich Null gesetzt wurde. Denkt man sich hier die δx, δy als Variable, so hat man:

$$\delta G_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_1}\, \delta x_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y_1}\, \delta y_1 + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}\, \delta x_2 + \ldots = 0.$$

Nun ist aber oben gezeigt worden, daß G_1 nichts anderes ist als $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, also sind die Koeffizienten der eben angeschriebenen Gleichung auch

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1{}^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial y_1}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial x_2} \ldots\ldots$$

Da das Analoge für jede andere der Gl. (4) bzw. (2) gezeigt werden kann, ist unsere Behauptung erwiesen.

Man erkennt somit: Die Lösbarkeit der Gl. (4) oder das Verschwinden ihrer Determinante, d. i. der Determinante (10), besagt, daß der betreffende Gleichgewichtszustand ein indifferenter ist, d. h. daß der Uebergang zu einem beliebigen Nachbarzustand auch bei Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung arbeitslos erfolgt.

5. Kriterien für die Stabilität. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Koeffizienten von (4), also auch die Elemente von (10) oder die zweiten Ableitungen von U mit

$$c_{11},\, c_{12},\, c_{13} \ldots;\quad c_{21},\, c_{22} \ldots;\quad c_{31},\, c_{32} \ldots;\quad \ldots$$

so haben wir zu fragen: Wann ist, damit ein Kleinstwert von U unter Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung vorhanden ist, der Ausdruck

$$c_{11}\, \delta x_1{}^2 + 2\, c_{12}\, \delta x_1\, \delta y_1 + c_{13}\, \delta x_1\, \delta x_2 + \ldots$$

nur positiver Werte fähig? Man nennt einen solchen homogenen Ausdruck vom zweiten Grad in mehreren Variablen eine »quadratische Form«. Die Theorie der quadratischen Formen liefert für das Positivsein einer Form die folgenden Bedingungen:

a) Es ist notwendig (aber nicht hinreichend), daß die Determinante der c positiv ist.

b) Sieht man die c als Veränderliche an, d. h. betrachtet man verschiedene Gleichgewichtsfiguren, so wird das Gebiet der stabilen von den instabilen immer durch solche getrennt, für die die Determinante gleich Null ist (ohne daß aber die Umkehrung gilt; das Ueberschreiten eines Punktes, in dem die Determinante verschwindet, muß noch nicht unbedingt ins instabile Gebiet führen).

c) Notwendig und hinreichend für die Stabilität ist, daß außer der ganzen Determinante auch jede Determinante positiv ist, die durch Fortlassen der letzten Zeilen und ebenso vieler Spalten aus der ursprünglichen entsteht, also:

$$c_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{usf.}$$

Damit wird jede Stabilitätsfrage beantwortbar. Insbesondere lehrt der zweite, wichtigste Satz: Stabile Gleichgewichtsfiguren werden von instabilen stets durch solche getrennt, für die die Knickgleichung erfüllt ist.

Sobald ein spannungsloser Zustand existiert, ist er immer stabil. Denn wenn alle $a = l$ sind, so ist $U = 0$, und da U als Quadratsumme nur positive Werte hat, so

bedarf hier jede Veränderung, wenn sie überhaupt Spannungen hervorbringt, einen positiven Arbeitsaufwand. Betrachtet man daher eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren, bei denen sich die äußern Kräfte um einen gemeinsamen Faktor λ unterscheiden, sich also untereinander proportional verändern, und geht man mit λX, λY in die Knickgleichung ein, so erhält man eine Gleichung für λ und hat nur den kleinsten λ-Wert aufzusuchen, der dieser Gleichung genügt. Für alle λ unterhalb dieses Wertes herrscht bestimmt Stabilität, da der Uebergang vom stabilen spannungslosen Zustand zu einem instabilen notwendig durch einen der Knickgleichung genügenden hindurchführen muß. Weiß man überdies, daß dieses λ eine einfache Wurzel der Knickgleichung ist, so ändert ihre linke Seite, d. i. die Determinante (10), hier sicher ihr Vorzeichen; für größere λ besteht dann also Instabilität.

Wir wollen jetzt die hier abgeleiteten Grundsätze auf die Untersuchung bestimmter Gleichgewichtsfälle anwenden.

6. Erstes Beispiel; Einfachstes Fachwerk in der Ebene. Zunächst soll an einem »Schulbeispiel« die im vorstehenden entwickelte allgemeine Theorie erläutert werden.

Zwei gleich lange, vollkommen gleiche Stäbe sind um feste Punkte drehbar und im gemeinsamen Gelenk in Richtung ihrer Winkelhalbierenden durch ein Gewicht P belastet (Abb. 2). Die kritischen Werte dieser Last sind zu bestimmen.

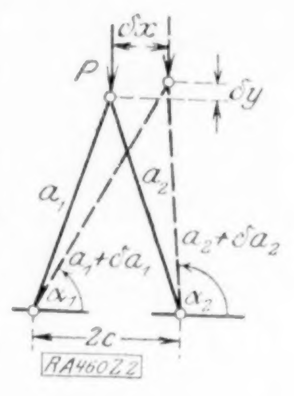


Abb. 2.

a) Elementares Verfahren. Es ist die Zahl der Knoten $k = 3$, die Stabzahl $s = 2$ und die Anzahl der Auflagerbedingungen $m = 4$. Die beiden Stäbe haben im spannungsfreien Zustand je die Länge l; erteilt man dem gemeinsamen Gelenk eine Verschiebung δx, δy so sind die neuen Stablängen a_1 und a_2 und die Neigungswinkel der beiden Stäbe gegen die durch die Auflagerpunkte gelegte Achse α_1 und α_2. Nach den Gl. (3) sind

$$\delta a_1 = \delta x \cos \alpha_1 + \delta y \sin \alpha_1 , \qquad \delta a_2 = \delta x \cos \alpha_2 + \delta y \sin \alpha_2$$

und $a_1 \, \delta \alpha_1 = - \delta x \sin \alpha_1 + \delta y \cos \alpha_1$, $\quad a_2 \, \delta \alpha_2 = - \delta x \sin \alpha_2 + \delta y \cos \alpha_2$.

Die Gleichungen (4) lauten unter Fortlassung des Konstantwertes $\frac{EF}{l}$, der bei der Knickbedingung herausfällt

$$- (a_1 - l) \sin \alpha_1 \, \delta \alpha_1 - (a_2 - l) \sin \alpha_2 \, \delta \alpha_2 + \cos \alpha_1 \, \delta a_1 + \cos \alpha_2 \, \delta a_2 = 0$$
$$+ (a_1 - l) \cos \alpha_1 \, \delta \alpha_1 + (a_2 - l) \cos \alpha_2 \, \delta \alpha_2 + \sin \alpha_1 \, \delta a_1 + \sin \alpha_2 \, \delta a_2 = 0.$$

Setzt man für $\delta \alpha$ und δa die Werte ein, so ergibt sich

$$\delta x \left[2 - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_1} \right) \right] + \delta y \left[\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{a_2} \right] l = 0$$

$$\delta x \left[\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{a_2} \right] l + \delta y \left[2 - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} \right) \right] = 0$$

und es lautet die Knickgleichung

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} \right), & l \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{a_2} \right) \\ l \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{a_2} \right), & 2 - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} \right) \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (11)$$

oder

$$0 = 4 - 2 l \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{l^2}{a_1 a_2} \sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11').$$

b) Verfahren mit Hilfe der Formänderungsarbeit. Der Ausdruck für das elastische Potential [Gl. (6)] ist

$$U = {}^1/_2 \frac{EF}{l} [(a_1 - l)^2 + (a_2 - l)^2] - L.$$

Wenn wir den konstanten Faktor $\frac{EF}{l}$ weglassen, so erhalten wir unter Beachtung der Gl. (3) [und der Gl. (7)]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} = l \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{a_2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} \right)$$

und als Knickbedingung, d. i. Nullsetzen der Determinante (10) wieder die Gl. (11).

7. Diskussion der Knickbedingung. Wir betrachten die Stabilität der symmetrischen Gleichgewichtsfigur: $a_1 = a_2 = a$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 180 - \alpha$. Hierfür lautet die Gl. (11)

$$0 = \left(1 - \frac{l}{a}\sin^2\alpha\right)\left(1 - \frac{l}{a}\cos^2\alpha\right) \quad \text{oder} \quad \sin^2\alpha = \frac{a}{l} \text{ und } \cos^2\alpha = \frac{a}{l}.$$

Man sieht unmittelbar, daß $a < l$ sein muß, daß also nur bei Druck überhaupt eine Instabilität möglich wird. Ist $2c$ die Entfernung der beiden festen Punkte, um die die Stäbe drehbar sind, so ist $c = a \cdot \cos\alpha$ und damit werden die Knickgleichungen

$$\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c}{l} \quad \text{und} \quad \cos^3\alpha = \frac{c}{l},$$

wobei aus der ersten Bedingung zwei Lösungen hervorgehen.

Die kritischen Lasten ergeben sich aus $P = 2\,S \sin\alpha = -2\,E\,F \frac{a-l}{l} \sin\alpha$. Nun ist $\frac{a-l}{l} = -\cos^2\alpha$, bzw. $-\sin^2\alpha$ und daher

$$P = 2\,E\,F\cos^2\alpha\sin\alpha\,, \quad \text{bzw.} \quad 2\,E\,F\sin^3\alpha.$$

Ist z. B. $c/l = 0{,}336$, so sind die kritischen Werte von α, der Größe nach geordnet

$$\cos\alpha' = 0{,}400, \quad \cos\alpha'' = 0{,}695\ (= \sqrt[3]{c/l}), \quad \cos\alpha''' = 0{,}739$$

und die zugehörigen kritischen Lasten

$$P' = 0{,}29\,E\,F, \quad P'' = 0{,}74\,E\,F, \quad P''' = 0{,}74\,E\,F.$$

In Abb. 3 sind die spannungsfreie Lage und die drei für dieses c/l kritischen Stellungen maßstabrichtig aufgetragen.

Um zu erfahren, was diese kritischen Werte aber bedeuten, müssen wir auf die vollständige Stabilitätsbedingung zurückgehen. Die Gl. (11) wird für den Fall der Symmetrie

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \frac{l}{a}\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 1 - \frac{l}{a}\cos^2\alpha \end{vmatrix}.$$

Die Stabilität verlangt (notwendige und hinreichende Bedingungen nach c) in **5**), daß die Determinante selbst und ihr erstes Element positiv seien, d. h., daß

$$1 - \frac{l}{a}\sin^2\alpha > 0\,, \qquad 1 - \frac{l}{a}\cos^2\alpha > 0.$$

Dies ist hier auch unmittelbar verständlich. Denn daß die beiden andern Elemente der Determinante gleich Null sind, besagt: die Verrückung in der x-Richtung bedarf nur einer x-Kraft, nämlich $(1 - l/a\sin^2\alpha)\,\delta x^2$, die Verrückung in der y-Richtung nur einer y-Kraft $(1 - l/a\cos^2\alpha)\,\delta y^2$ und diese beiden Kräfte müssen positiv sein. Mit der Beziehung $a\cos\alpha = c$ gehen die Stabilitätsbedingungen über in

$$\sin^2\alpha\cos\alpha < \frac{c}{l} \quad \text{und} \quad \cos^3\alpha < \frac{c}{l}.$$

Setzt man statt der Ungleichheitszeichen die Gleichheitszeichen, so erhält man die kritischen Werte. In der Abb. 4 sind die Ausdrücke $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ und $\cos^3\alpha$ als Abszissen zu den Ordinaten c tg α (das

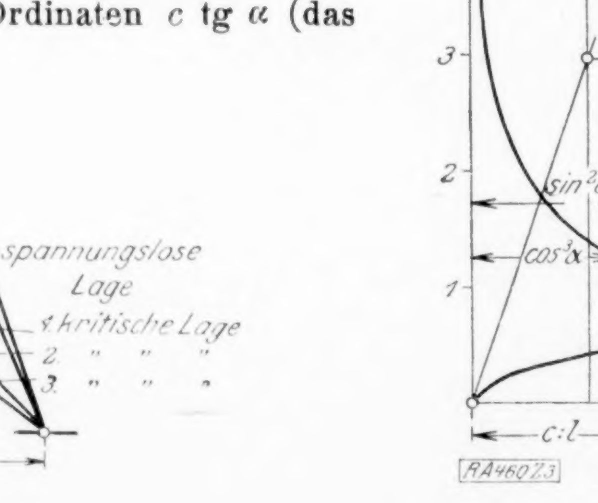


Abb. 3.

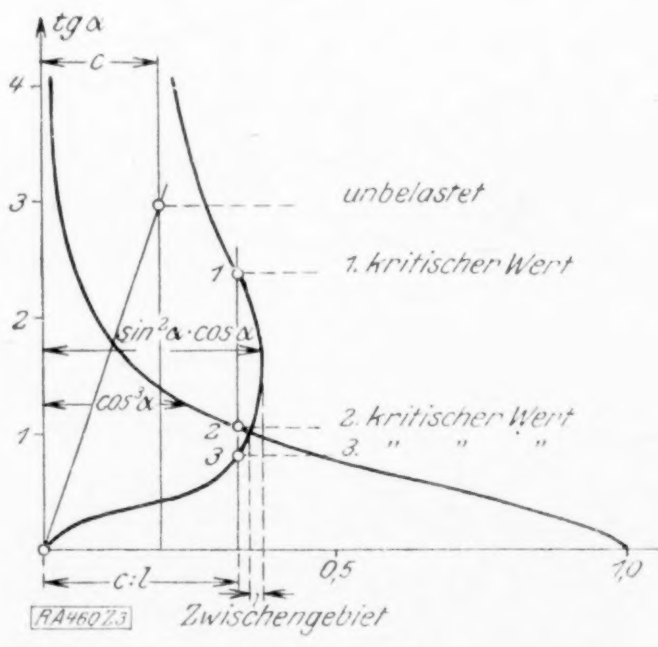


Abb. 4.

ist die jeweilige Höhenlage der Spitze) aufgetragen. Ein Schnitt im Abstand $x = c:l$ gibt die kritischen Werte und zeigt, daß nur oberhalb des ersten Wertes beide Ungleichheiten erfüllt sind. Da er auf der $\sin^2\alpha\cos\alpha$ Linie liegt, tritt Instabilität zuerst gegen horizontale Verrückungen auf. Sie besteht aber nur in einem begrenzten Gebiet — bis zum zweiten Schnitt mit derselben Linie. Schon vorher ist jedoch beim Schnitt mit der

$\cos^3 \alpha$-Linie Instabilität gegen Vertikalstörungen vorhanden. Man entnimmt der Abbildung, daß bei größeren $c:l$-Werten nur diese möglich sind.

Wir haben zusammengefaßt das Ergebnis: Stellt man zwei gleiche Stäbe unter spitzem Winkel zusammen und belastet sie in ihrem Schnittpunkt in Richtung der Winkelsymmetralen, so werden sie bei wachsendem Druck zuerst instabil gegen Seitenstörungen, dann bevor noch diese Instabilität aufhört, instabil gegen Vertikalstörungen. Bei flachem Anfangswinkel der Stäbe besteht nur diese Instabilität. In einem kleinen Zwischenbereich von $c:l$ endet die seitliche Instabilität bevor die vertikale beginnt.

Die oben angegebenen Zahlenwerte zeigen, daß bei Stäben aus den üblichen Baustoffen, Stahl, Holz oder dergl. die kritischen Belastungen weit über jenen liegen, die das Material zufolge seiner begrenzten Festigkeit verträgt. Es wird also die Stabilitätsbetrachtung in diesem Falle keine praktische Bedeutung besitzen. Andererseits ist die hier zugrundegelegte Anordnung sehr gut für Demonstrationsversuche geeignet. Man muß dann natürlich anstelle von eigentlichen Stäben Zug- und Druckfedern (Schraubenfedern) nehmen, die Längenänderungen bis zu etwa 10 vH der natürlichen Länge leicht zulassen.

8. Zweites Beispiel: Einfachstes Fachwerk im Raum. Es soll der Fall von Beispiel 1 ins räumliche übertragen werden. Drei vollkommen gleiche Stäbe sind um feste Punkte drehbar, die die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes bilden; im gemeinsamen Kugel-Gelenk der Stäbe sind sie durch ein Gewicht P in Richtung ihrer Symmetralen belastet. Es werden die kritischen Werte dieser Last gesucht.

Wir gehen jetzt nach dem Verfahren in **2** vor. Die Stäbe haben im spannungsfreien Zustand je die Länge l. Dem gemeinsamen Gelenk erteilen wir die Verschiebungen δx, δy, δz nach den drei Koordinatenrichtungen und damit entstehen die neuen Stablängen a_1, a_2, a_3. Die Richtungscosinusse der drei Stäbe sind $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ .... $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$. Aus den Gl. (3') erhält man die Längen- und Winkeländerungen .

$$\delta a_1 = \delta x \cos\alpha_1 + \delta y \cos\beta_1 + \delta z \cos\gamma_1$$

$$\sin\alpha_1 \cdot \delta\alpha_1 = \cos\alpha_1 \cdot \frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta x}{a_1}$$

$$\sin\beta_1 \cdot \delta\beta_1 = \cos\beta_1 \cdot \frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta y}{a_1}$$

$$\sin\gamma_1 \cdot \delta\gamma_1 = \cos\gamma_1 \cdot \frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta z}{a_1}$$

und ebensolche Gleichungen, wie sie hier für den Stab 1 angeschrieben sind, für die Stäbe 2 und 3. Die Gleichungen (4') lauten

$$\sum_1^3 [-(a-l)\sin\alpha \cdot \delta\alpha + \delta a \cdot \cos\alpha] = 0$$

$$\sum_1^3 [-(a-l)\sin\beta \cdot \delta\beta + \delta a \cdot \cos\beta] = 0$$

$$\sum_1^3 [-(a-l)\sin\gamma \cdot \delta\gamma + \delta a \cdot \cos\gamma] = 0$$

und nach Einsetzen der Werte für $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ und δa

$$0 = \delta x\left[3 - l\sum_1^3 \frac{\sin^2\alpha}{a}\right] + \delta y \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a} + \delta z \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a}$$

$$0 = \delta x \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a} + \delta y \cdot \left[3 - l\sum_1^3 \frac{\sin^2\beta}{a}\right] + \delta z \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos\beta\cos\gamma}{a}$$

$$0 = \delta x \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a} + \delta y \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos\beta\cos\gamma}{a} + \delta z\left[3 - l\sum_1^3 \frac{\sin^2\gamma}{a}\right].$$

Damit wird die Knickbedingung

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - l\sum_1^3 \frac{\sin^2\alpha}{a}, & l\sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a}, & l\sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a} \\ l\sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a}, & 3 - l\sum_1^3 \frac{\sin^2\beta}{a}, & l\sum_1^3 \frac{\cos\beta\cos\gamma}{a} \\ l\sum_1^3 \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a}, & l\sum_1^3 \frac{\cos\beta\cos\gamma}{a}, & 3 - l\sum_1^3 \frac{\sin^2\gamma}{a} \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; (12).$$

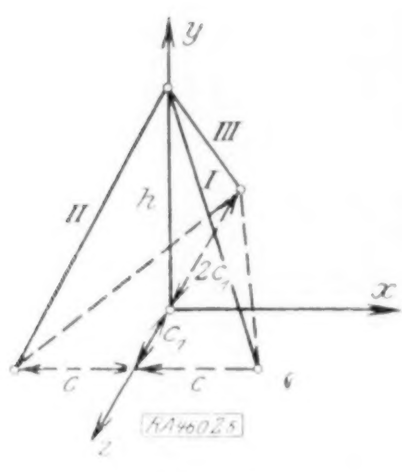


Abb. 5.

Wir wollen uns nun bei der **Diskussion** wie früher auf die symmetrischen Gleichgewichtsfiguren beschränken, es sind also $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Das Koordinatensystem wählen wir so (Abb. 5), daß die y Achse durch das gemeinsame Gelenk geht und der Ursprung im Schwerpunkt des Basisdreiecks von der Seitenlänge $2c$ liegt (h ist die Höhe der Spitze über der Basis). Sonach sind die Richtungscosinusse der drei Stäbe

$$\cos\alpha_1 = \frac{c}{a} = \cos\alpha\,, \qquad \cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha)\,, \qquad \cos\alpha_3 = 0$$

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = \cos\beta_3 = \frac{h}{a} = \cos\beta$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2 = \frac{c}{a}\frac{\sqrt{3}}{3} = \cos\gamma\,, \qquad \cos\gamma_3 = -2\cos\gamma$$

Die Knickgleichung (12) wird jetzt

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \frac{l}{a}(3 - 2\cos^2\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{l}{a}\sin^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{l}{a}(1 - 2\cos^2\gamma) \end{vmatrix} \quad . \quad (12')$$

oder

$$0 = \left(3 - \frac{3\,l}{a} + 2\,\frac{l}{a}\cos^2\alpha\right)\left(1 - \frac{l}{a}\sin^2\beta\right)\left(1 - \frac{l}{a} + \frac{2\,l}{a}\cos^2\gamma\right)$$

und daher

$$\text{a)}\ \cos^2\alpha = -\,{}^3/_2\,\frac{a-l}{l} \qquad \text{b)}\ \sin^2\beta = \frac{a}{l} \qquad \text{c)}\ \cos^2\gamma = -\,{}^1/_2\,\frac{a-l}{l}\,.$$

Die Stabilität verlangt, daß [aus Determinante (12')]

$$3 - 3\,\frac{l}{a} + 2\,\frac{l}{a}\cos^2\alpha > 0\,, \qquad 1 - \frac{l}{a}\sin^2\beta > 0\,, \qquad 1 - \frac{l}{a} + \frac{2\,l}{a}\cos^2\gamma > 0\,,$$

wobei die linken Seiten dieser Ungleichungen die Kräfte vorstellen, die eine Verschiebung von der Größe 1 in der x- bzw. y- bzw. z Richtung erfordert. Setzt man statt der Ungleichheitszeichen die Gleichheitszeichen, so entstehen die kritischen Werte a), b), c). Man sieht wieder, daß $a < l$ sein muß, daß also nur bei Druck eine Instabilität möglich ist. Zwischen den Winkeln α, β und γ besteht die Beziehung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ und wir gewinnen damit, wenn wir sie für die Stäbe 1, 2 und 3 anschreiben, die beiden Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\,, \qquad \cos\gamma = {}^1/_2\sin\beta\,.$$

Führen wir noch für a den Wert $c/\cos\alpha$ ein, so lauten die Knickbedingungen in β ausgedrückt

$$\text{a) und c)}\ \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\beta\,(2 - \sin^2\beta) = \frac{c}{l} \qquad \text{b)}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^3\beta = \frac{c}{l}\,.$$

Hierbei ist die erste Gleichung für die Instabilität in horizontaler Richtung, die zweite für die in vertikaler Richtung maßgebend.

Die kritischen Werte der Last ergeben sich aus $P = \frac{3\,h}{l}S = -\frac{3\,h}{l}EF\frac{a-l}{l}$. Hierbei ist $\frac{a-l}{l}$ in den Fällen a) und c) gleich $-\,{}^1/_2\sin^2\beta$, im Fall b) gleich $-\cos^2\beta$, die Höhenlage h der Spitze ist bestimmt durch $h = a\cos\beta = {}^2/_3\sqrt{3}\,c\,\mathrm{cotg}\,\beta$. Somit wird

$$P = \sqrt{3}\,E\,F\,\frac{c}{l}\sin\beta\cos\beta \qquad \text{bzw.} \qquad = 2\sqrt{3}\,E\,F\,\frac{c}{l}\,\frac{\cos^3\beta}{\sin\beta}\,.$$

In Abb. 6 sind in einem rechtwinkligen Achsenkreuz als Abszissen die Werte $\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\beta\,(2 - \sin^2\beta)$ bzw. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^3\beta$ zu den Ordinaten $\mathrm{cotg}\,\beta$ aufgetragen. Für ein gegebenes c/l entnimmt man daraus die kritischen Werte β. Man sieht, daß für das gezeichnete c/l zuerst Instabilität in horizontaler Richtung auftritt, da nur oberhalb des Schnittpunktes mit der a), c) Linie beide Ungleichheiten erfüllt sind. Bei größern c/l Werten ist nur Instabilität in vertikaler Richtung vorhanden.

Abb. 6.

Auch die Ergebnisse dieses Beispiels könnte man leicht an einem einfachen Modell kontrollieren, bei dem an Stelle der Stäbe geeignete Federn verwendet werden.

9. Drittes Beispiel: Ebener Fachwerkträger. Das in der Abb. 7 dargestellte statisch bestimmte Parallelfachwerk mit statisch bestimmter Lagerung (Festlager in 0 und Bewegungslager in 4) hat 5 Knoten ($k = 5$), 7 Stäbe ($s = 7$) und 3 Auflagerbedingungen ($m = 3$). Sämtliche Gurtstäbe haben die natürliche Länge l, die verzerrte Länge a, die Querschnittsfläche F und den Elastizitätsmodul E. Für die Gitterstäbe, die unter dem Winkel α gegen die Untergurtstäbe geneigt sind, gelten als entsprechende Größen l', a', F', E'.

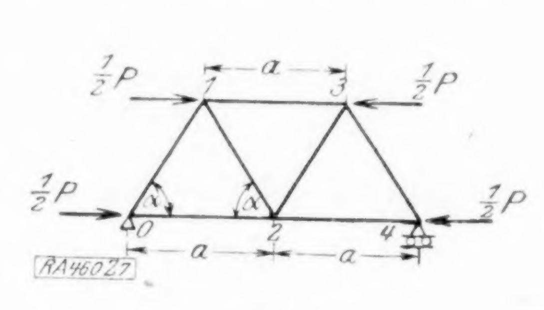


Abb. 7.

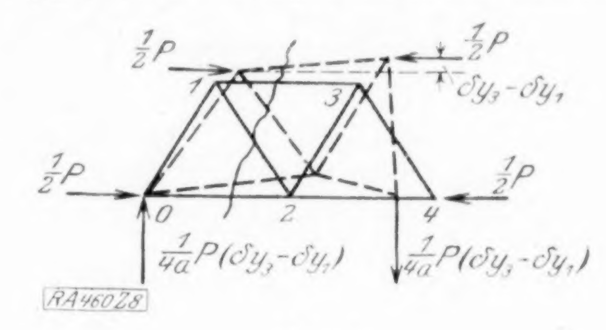


Abb. 8.

Es soll die Stabilität eines Gleichgewichtszustandes untersucht werden, bei dem die Gurtstäbe gleichmäßig verkürzt oder gedehnt, die Gitterstäbe hingegen unverändert sind. Das zugehörige System äußerer Kräfte bestehe aus vier Horizontalkräften in den Knoten 0, 1, 3 und 4 von der gleichen Größe $^1/_2\, P$.

Zur Aufstellung der Knickbedingung verfahren wir nach **3**: wir lösen das Spannungsproblem für den deformierten Zustand und setzen den Stabkraftzuwachs δS gleich $EF\,\delta a/l$.

Die Knoten 1, 2 und 3 verschieben sich in der vertikalen y-Richtung um δy_1, δy_2, δy_3 und es entstehen in 0 und 4 die vertikalen Reaktionen $+\frac{P}{4a}(\delta y_3 - \delta y_1)$ bzw. $-\frac{P}{4a}(\delta y_3 - \delta y_1)$ (Abb. 8). Stellt man für den Knoten 0 die Gleichgewichtsbedingungen auf, so erhält man (in vertikaler bzw. in horizontaler Richtung)

$$-\frac{P}{2}\frac{\delta y_2}{a} + \frac{P}{4a}(\delta y_3 - \delta y_1) + \delta S_{01} \sin\alpha = 0, \qquad \delta S_{02} + \delta S_{01}\cos\alpha = 0$$

und daraus

$$\delta S_{01} = \frac{P}{4a\sin\alpha}(\delta y_1 + 2\,\delta y_2 - \delta y_3), \qquad \delta S_{02} = -\frac{P}{4a}\operatorname{cotg}\alpha\,(\delta y_1 + 2\,\delta y_2 - \delta y_3).$$

Für den Knoten 4 sind unter Vertauschung der Indizes 1 mit 3

$$\delta S_{34} = \frac{P}{4a\sin\alpha}(-\delta y_1 + 2\,\delta y_2 + \delta y_3), \qquad \delta S_{24} = -\frac{P}{4a}\operatorname{cotg}\alpha\,(-\delta y_1 + 2\,\delta y_2 + \delta y_3).$$

Der Schnitt durch die Stäbe $\overline{02}$, $\overline{12}$, $\overline{13}$ liefert als vertikale Gleichgewichtsbedingung

$$\delta S_{12}\sin\alpha = \frac{P}{4a}(\delta y_3 - \delta y_1) - \frac{P}{2}\frac{\delta y_2}{a} - \frac{P}{2a}(\delta y_3 - \delta y_1),$$

also

$$\delta S_{12} = \frac{P}{4a\sin\alpha}(\delta y_1 - 2\,\delta y_2 - \delta y_3)$$

und analog ist

$$\delta S_{23} = \frac{P}{4a\sin\alpha}(-\delta y_1 - 2\,\delta y_2 + \delta y_3).$$

Endlich gewinnt man aus der horizontalen Gleichgewichtsbedingung im früheren Schnitt

$$\delta S_{13} + \delta S_{12}\cos\alpha + \delta S_{02} = 0$$

den letzten noch zu bestimmenden Stabkraftzuwachs

$$\delta S_{13} = \frac{P}{4a}\operatorname{cotg}\alpha \,.\, 4\,\delta y_2.$$

Die Längenänderungen der sieben Stäbe sind

$$\delta a_{01} = \delta x_1\cos\alpha + \delta y_1\sin\alpha, \qquad \delta a_{02} = \delta x_2, \qquad \delta a_{34} = +(\delta x_4 - \delta x_3)\cos\alpha + \delta y_3\sin\alpha,$$

$$\delta a_{24} = \delta x_4 - \delta x_2, \qquad \delta a_{12} = +(\delta x_2 - \delta x_1)\cos\alpha - (\delta y_2 - \delta y_1)\sin\alpha,$$

$$\delta a_{23} = (\delta x_3 - \delta x_2)\cos\alpha + (\delta y_3 - \delta x_2)\sin\alpha, \qquad \delta a_{13} = \delta x_3 - \delta x_1.$$

Setzt man jedes δa gleich dem betreffenden $\delta S \frac{l}{E F}$ bzw. $\delta S \frac{l'}{E' F'}$, so werden mit den Abkürzungen

$$p = \frac{P}{2a} \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot \frac{l}{E F}, \quad p' = \frac{P}{2a} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{l'}{E' F'} = \varrho\, p, \quad \varrho = \frac{p'}{p} = \frac{l'}{l} \frac{E F}{E' F'} \cos^2 \alpha \quad . \quad (13)$$

die Gleichungen für die Stäbe $\overline{01}$, $\overline{02}$ und $\overline{12}$

$$\delta x_1 \operatorname{cotg} \alpha + \delta y_1 + \varrho \frac{p}{2} (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3)$$

$$\delta x_2 \frac{1}{\sin \alpha} = - \frac{p}{2} \frac{1}{\cos \alpha} (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3)$$

$$+ (\delta x_2 - \delta x_1) \operatorname{cotg} \alpha - (\delta y_2 - \delta y_1) = + \varrho \frac{p}{2} (\delta y_1 - 2 \delta y_2 - \delta y_3).$$

Addiert man die erste und dritte Gleichung und subtrahiert hiervon die mit $\cos \alpha$ multiplizierte zweite, so entsteht

$$2 \delta y_1 - \delta y_2 = \varrho\, p (\delta y_1 - \delta y_3) + \frac{p}{2} (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)},$$

eine Gleichung, die nur die δy enthält. In gleicher Weise ergibt sich für das Dreieck 2, 3, 4 unter Vertauschung der Indizes 1 mit 3

$$2 \delta y_3 - \delta y_2 = \varrho\, p (\delta y_3 - \delta y_1) + \frac{p}{2} (\delta y_3 + 2 \delta y_2 - \delta y_1) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)},$$

denn die horizontale Verschieblichkeit von 4 ändert nichts an der Symmetrie. Eine dritte Gleichung mit den drei δy liefert das Dreieck 1, 2, 3 durch Aufstellen von $\delta a_{12} + \delta a_{23} - \cos \alpha\, \delta a_{13}$ und Division durch $\sin \alpha$

$$\delta y_1 - 2 \delta y_2 + \delta y_3 = - 2 \varrho\, p\, d y_2 - 2 p \delta y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}.$$

Aus den Gl. (a), (b), (c) kann man durch Nullsetzen der Determinante die Knickbedingung finden. Es ist aber einfacher, statt (a) und (b) die Summe und die Differenz dieser Gleichungen zu nehmen,

$$\delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 = p \delta y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)} + \text{(b)},$$

$$2 (\delta y_1 - \delta y_3) = 2 \varrho\, p (\delta y_1 - \delta y_3) + p (\delta y_1 - \delta y_3) \quad . \quad . \quad \text{(a)} - \text{(b)},$$

$$\delta y_1 - 2 \delta y_2 + \delta y_3 = - 2 \varrho\, p \delta y_2 - 2 p \delta y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}.$$

Die zweite Gleichung besagt: entweder ist $\delta y_1 = \delta y_3$, also die Knickform symmetrisch, oder es ist

$$p (1 + 2 \varrho) = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

die Knickbedingung bei unsymmetrischer Form. Um nun die Knickgleichung für die symmetrische Form zu erhalten, setzt man $\delta y_1 = \delta y_3$ in (a) + (b) und in (c) ein und bekommt damit aus

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & -(1+p) \\ 2 & -2 + 2 \varrho\, p + 2 p \end{vmatrix}$$

die Beziehung

$$p (3 + 2 \varrho) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Bezeichnen wir mit

$$J = 2 F \left(\frac{a}{4 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

angenähert das Trägheitsmoment der beiden Gurtquerschnitte für eine in der Mitte zwischen den Gurtungen liegende horizontale Achse und setzen

$$L = {}^3\!/_2 \sqrt{a\, l} \sim {}^3\!/_2\, a \sim {}^3\!/_2\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

so wird aus der ersten Gl. (13)

$$P = 36 \frac{E J}{L^2} p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Mit Beachtung der Gl. (14) und (15) ist daher für die symmetrische Knickform

$$P = 36 \frac{E J}{L^2} \frac{1}{3 + 2 \varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und für die unsymmetrische Form

$$P = 72 \frac{E J}{L^2} \frac{1}{1 + \varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Der Grenzfall $\varrho = 0$ bedeutet unendlich starke Diagonalstäbe. Hierfür werden

$$P = 12\,\frac{E\,J}{L^2} \text{ bzw. } 72\,\frac{E\,J}{L^2}\,.$$

Bei einem vollwandigen Stab von der Länge des Untergurts ($l = {}^4/_3\,L$) sind die Knicklasten $5{,}6\,\frac{E\,J}{L^2}$ bzw. $22{,}2\,\frac{E\,J}{L^2}$, bei einem Stab von der Länge des Obergurts ($l = {}^2/_3\,L$) sind die Knicklasten hiervon das Vierfache. Der oben berechnete Grenzfall für $\varrho = 0$ liegt, wie von vornherein zu vermuten war, zwischen diesen Werten.

Auch in diesem Fall eines ebenen Fachwerkträgers von der Gestalt eines Dachbinders wird die Stabilitäts-Untersuchung kaum praktische Bedeutung erlangen, da lange bevor die berechnete Knickgrenze des Fachwerks erreicht ist, die Tragfähigkeit der Einzelstäbe erschöpft sein wird. Wir benutzen aber die hier durchgeführte Betrachtung, um im folgenden das für die Anwendungen wichtigste Problem der Stabilitätsuntersuchung, den langgestreckten Gitterträger, zu untersuchen.

10. Viertes Beispiel: Der Gitterträger, Aufstellung der Gleichungen. Der in der Abb. 9 dargestellte statisch bestimmte und statisch bestimmt gelagerte Gitterträger, von dem die Untergurtknoten mit 0,2 bis $2\,n$, die Obergurtknoten mit 1,3 bis $2\,n-1$ beziffert sind, hat $2\,n+1$ Knotenpunkte, $4\,n-1$ Stäbe und 3 Auflagerbedingungen.

Wie im vorhergehenden Beispiel soll die Stabilität eines Gleichgewichtszustandes untersucht werden, bei dem die Gurtstäbe gleichmäßig ihre Länge geändert haben und die Gitterstäbe unverändert geblieben sind. Das zugehörige System der äußeren Kräfte bestehe aus vier Horizontalkräften von der Größe $^1/_2\,P$, die in den Knoten 0,1, $2\,n-1$ und $2\,n$ angreifen. Die Gurtstäbe haben die natürliche Länge l, die verzerrte Länge a, die Querschnittsfläche F, den Elastizitätsmodul E; für die Gitterstäbe gilt entsprechend $l' = \frac{l}{2}\cos\alpha$, a' F', E', α ist der Winkel, den sie mit den Untergurtstäben einschließen. Bei der Berechnung wollen wir uns auf symmetrische Deformation des ganzen Fachwerks beschränken.

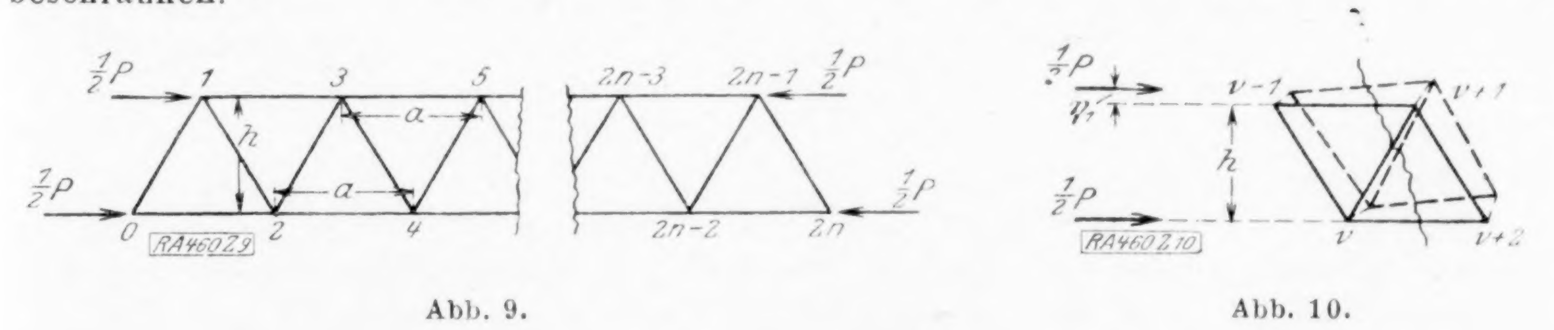


Abb. 9. Abb. 10.

Wir schlagen denselben Weg ein wie in **9**, indem wir die Spannungen für den deformierten Zustand ermitteln und die Stabkraftzuwächse δS gleich $E\,F\,\delta\,a/l$ setzen. Die Verschiebungen bezeichnen wir jetzt der Kürze halber mit ξ und η an Stelle der früheren δx und δy. In der Abb. 10 sind zwei Dreiecke $\nu-1$, ν, $\nu+1$, $\nu+2$ im verzerrten Zustand herausgezeichnet. Bei einem Schnitt durch die drei Stäbe $\nu-1$, $\nu+1$ ν, $\nu+1$; ν, $\nu+2$ liefert die vertikale Gleichgewichtsbedingung

$$\delta\,S_{\nu,\,\nu+1} = \frac{P}{2\,a\,\sin\alpha}\,(\eta_{\nu+2} + \eta_{\nu+1} - \eta_{\nu-1} - \eta_\nu) \quad . \; . \; . \; . \quad (\text{a}).$$

Stellt man das Moment für den Knoten ν auf, so erhält man mit $h = \frac{a}{2}\,\text{tg}\,\alpha$

$$\delta\,S_{\nu-1,\,\nu+1} = \frac{P}{2\,a}\,\text{cotg}\,\alpha \cdot (\eta_{\nu+1} + 2\,\eta_\nu + \eta_{\nu-1} - 2\,\eta_1) \quad . \; . \; . \quad (\text{b}).$$

Für den Diagonalstab $\nu-1$, ν ist in gleicher Weise

$$\delta\,S_{\nu-1,\,\nu} = \frac{P}{2\,a\,\sin\alpha}\,(-\eta_{\nu+1} - \eta_\nu + \eta_{\nu-1} + \eta_{\nu-2}) \quad . \; . \; . \; . \quad (\text{c}).$$

Die Längenänderungen der Stäbe eines Dreiecks $\nu-1$, ν, $\nu+1$ sind

$$\delta\,a_{\nu-1,\,\nu+1} = \xi_{\nu+1} - \xi_{\nu-1}\,, \qquad \delta\,a_{\nu-1,\,\nu} = (\xi_\nu - \xi_{\nu-1})\cos\alpha + (\eta_\nu - \eta_{\nu-1})\sin\alpha,$$
$$\delta\,a_{\nu,\,\nu+1} = (\xi_{\nu+1} - \xi_\nu)\cos\alpha + (\eta_{\nu+1} - \eta_\nu)\sin\alpha$$

und daraus wird, wenn man die 2. und 3. Gleichung addiert und hiervon die mit $\cos\alpha$ multiplizierte erste subtrahiert

$$-\delta a_{\nu-1,\nu+1}\cos\alpha+\delta a_{\nu-1,\nu}+\delta a_{\nu,\nu+1}=(\eta_{\nu+1}-2\,\eta_\nu+\eta_{\nu-1})\sin\alpha .$$

Führt man die Werte der Stabkraftzuwächse ein, so erhält man unter Beachtung daß $\delta a=\delta S l/E F$ bzw. $\delta S' l/E' F'$ mit den Abkürzungen der Gl. (13) die Differenzengleichung

$$\eta_{\nu+1}-2\,\eta_\nu+\eta_{\nu-1}=-p\,(\eta_{\nu+1}+2\,\eta_\nu+\eta_{\nu-1}-2\,\eta_1)+\varrho\,p\,(\eta_{\nu+2}-2\,\eta_\nu+\eta_{\nu-2}) \quad (21).$$

Sie wurde hier nur für ein (einen Obergurtstab enthaltendes) Dreieck hergeleitet, gilt aber, wie man sich leicht überzeugt, unverändert auch für alle anderen Dreiecke von $\nu=2$ bis $2\,n-2$. Für $\nu=1$ tritt in (21) noch η_{-1} auf, worin die Neigung eines links von 1 liegenden Gurtstabes zum Ausdruck kommt. Da die äußere Kraft in 1 horizontal ist, hat man $\eta_{-1}=\eta_1$ zu setzen, was man auch unmittelbar durch Ausrechnen von δS_{01} bestätigen kann. Die Randbedingungen der Differenzengleichung (21) lauten also (bei Symmetrie):

$$\eta_0=0,\quad \eta_{-1}=\eta_1,\quad \eta_{n+1}=\eta_{n-1},\quad \eta_{n+2}=\eta_{n-2}\quad .\ .\ .\ .\ (22).$$

Schreibt man die Gl. (21) für $\nu=1, 2 \ldots . n$ mit diesen Nebenbedingungen an, so entstehen n lineare, homogene Gleichungen für $\eta_1, \eta_2 \ldots . \eta_n$, deren gleich Null gesetzte Determinante die Knickgleichung bildet. Wir eliminieren aber zunächst in Gl. (21) mit Hilfe der Substitution

$$\eta_\nu=y_\nu+{}^1/_2\,\eta_1$$

das störende η_1. Die Differenzengleichung wird dann

$$y_{\nu+1}-2\,y_\nu+y_{\nu-1}=-p\,(y_{\nu+1}+2\,y_\nu+y_{\nu-1})+\varrho\,p\,(y_{\nu+2}-2\,y_\nu+y_{\nu-2}) \quad (21')$$

und die Randbedingungen sind jetzt

$$y_0=-y_1,\qquad y_{-1}=y_1,\qquad y_{n+1}=y_{n-1},\qquad y_{n+2}=y_{n-2}\quad .\ .\ (22').$$

Bevor wir auf die Untersuchung des allgemeinen Falles eingehen, sollen zunächst die Grenzfälle von sehr starken und sehr schwachen Diagonalen betrachtet werden.

11. Der Gitterträger. Diskussion von Sonderfällen. A. Sehr starke Diagonalen bei endlicher Felderzahl. Im Grenzfall unendlich starker Diagonalen ist $\varrho=0$. Dann wird aus Gl. (21') die Kettengleichung zweiter Ordnung

$$y_{\nu+1}-2\,y_\nu+y_{\nu-1}=-p\,(y_{\nu+1}-2\,y_\nu+y_{\nu-1})$$

mit den Randbedingungen

$$y_0=-y_1,\qquad y_{n+1}=y_{n-1}.$$

Die anderen Bedingungen fallen fort, da weder y_{-1}, noch y_{n+1} in den Gleichungen vorkommen. Setzt man, um die Kettengleichung aufzulösen (zu »integrieren«), zunächst

$$y_\nu=e^{\nu z i}=x^\nu,$$

so ergibt sich durch Einsetzen und Kürzung durch x^ν, daß x der Gleichung

$$x-2+1/x=-p\,(x+2+1/x)$$

genügen muß. Daraus erhält man, unter Beachtung, daß $x=e^{zi}$, also $x+1/x=2\cos z$ die Beziehung $\cos z-1=-p\,(\cos z+1)$ oder $p=\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}$. Die allgemeine Lösung ist aus Bestandteilen der Form $e^{\nu z i}$ zusammenzusetzen, kann also in der Gestalt

$$y_\nu=A\cos\nu z+B\sin\nu z$$

geschrieben werden. Die Randbedingungen ergeben

$$A=-A\cos z-B\sin z,\quad A\cos(n+1)z+B\sin(n+1)z=A\cos(n-1)z+B\sin(n-1)z.$$

Damit es überhaupt eine Lösung des Ansatzes (21), (22) in der jetzt vereinfachten Form gibt, müssen diese beiden Gleichungen mit dem Unbekannten A, B auflösbar sein. Demnach muß ihre Determinante verschwinden und wir erhalten die Knickbedingung

$$0=\begin{vmatrix}1+\cos z & \sin z\\ -2\sin nz\cdot\sin z, & 2\cos nz\cdot\sin z\end{vmatrix}\quad\text{oder}\quad \cos(2\,n-1)\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2}=0$$

daher
$$(2\,n-1)\,z=\pi,\ \ 3\,\pi,\ \ 5\,\pi\ldots.\quad\text{bzw.}\quad z=\pi,\ \ 3\,\pi\ldots.$$

Für den kleinsten kritischen Wert $z=\pi:(2\,n-1)$ ist

$$p=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2\,(2\,n-1)}.$$

Mit den Bezeichnungen [siehe Gl. (16) und (17)]

$$J = 2\,F\left(\frac{a}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2 \qquad (16)$$

$$L = (n - {}^1/_2)\sqrt{a\,l} \sim (n - {}^1/_2)\,l \sim (n - {}^1/_2)\,a \qquad (23)$$

gewinnt man aus der ersten Gleichung (13) die Beziehung

$$P = 4\,\frac{E\,J}{L^2}(2\,n - 1)^2\,p \qquad (24)$$

und es wird, wenn man den oben gefundenen Wert von p einsetzt, die kritische Last

$$P = \varkappa^2\,\frac{E\,J}{L^2} \text{ mit } \varkappa = \frac{4\,n - 2}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4\,n - 2} \qquad (25).$$

Der nur von der Felderzahl abhängige Faktor $\varkappa$ ist sehr wenig von π verschieden. Bei großer Felderzahl wird $\varkappa$ praktisch gleich π und als Knicklast ergibt sich die Eulersche Formel. Für $n = 2$ ist $\varkappa = 1{,}103$; $n = 3$, $\varkappa = 1{,}034$; $n = 4$, $\varkappa = 1{,}017$; $n = 5$, $\varkappa = 1{,}010$; $n = 10$, $\varkappa = 1{,}002$. Der Gitterstab mit sehr starken Diagonalen verhält sich also schon bei verhältnismäßig geringer Felderzahl fast genau so wie ein Vollwandträger, der aus den beiden Gurtquerschnitten besteht. Diese Aehnlichkeit mit dem vollwandigen Stab besteht aber nur hinsichtlich der ersten Knicklast, die allerdings praktisch allein in Frage kommt. Die späteren Knicklasten weichen beträchtlich ab und sind beim Gitterstab überhaupt nur in beschränkter Zahl vorhanden. Die (geringe) Erhöhung des Wertes $\varkappa$ über π erklärt sich damit, daß die Annahme $L = (n - {}^1/_2)\,a$ als Länge für den vollwandigen Ersatz-Stab nur eine im Grunde willkürliche Schätzung ist.

B. Schwache Diagonalen bei großer Felderzahl. Wir wollen zunächst die allgemein gültige Differenzengleichung (21) etwas umformen. Die Differenzenquotienten zweiter und vierter Ordnung sind allgemein

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{y_{\nu+1} - 2\,y_\nu + y_{\nu-1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = \frac{y_{\nu+2} - 4\,y_{\nu+1} + 6\,y_\nu - 4\,y_{\nu-1} + y_{\nu-2}}{(\Delta x)^4}.$$

Da in unserem Fall $\Delta x = a/2$, so lautet mit $L = (n - {}^1/_2)\,a$ die Differenzengleichung (21) in anderer Schreibweise

$$\frac{L^2}{(2\,n-1)^2}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = -\,p\left\{4\,y + \frac{L^2}{(2\,n-1)^2}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - \varrho\left[\frac{L^4}{2\,n-1}\,\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} + \frac{4\,L^2}{(2\,n-1)^2}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right]\right\} \qquad (22'').$$

Wir lassen nun bei festem L die Felderzahl n ins Unendliche wachsen. Dann gehen die Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und die Glieder in (22″) die $(2\,n - 1)^4$ im Nenner haben, treten gegen die mit $(2\,n - 1)^2$ zurück. Den Wert p muß man von gleicher Größenordnung ansehen wie $\frac{1}{(2\,n-1)^2}$, es bleibt daher, wenn ϱ nicht sehr groß wird, auf der rechten Seite der Gleichung (22″) nur $-\,4\,p \cdot y$. Nehmen wir aber sehr schwache Diagonalen, d. h. ϱ groß an, so liefern die Glieder niederster Ordnung

$$\frac{L^2}{(2\,n-1)^2}\,y'' = -\,4\,p\,y + 4\,p\,\varrho\,\frac{L^2}{(2\,n-1)^2}\,y'' \quad \text{oder} \quad y'' = -\,\frac{(2\,n-1)^2}{L^2}\,\frac{4\,p}{1 - 4\,\varrho\,p}\,y$$

mit den Randbedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = L$.

Dies ist die bekannte Differentialgleichung, die sich bei der Berechnung der Knicklast eines einteiligen Stabes ergibt. Es muß also

$$\frac{(2\,n-1)^2}{L^2}\,\frac{4\,p}{1 - 4\,\varrho\,p} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

sein und daraus wird

$$p = \frac{\pi^2}{4\,[(2\,n-1)^2 + \varrho\,\pi^2]}.$$

Mit Gl. (24) erhält man nun, wenn man angenähert $(2\,n - 1)^2 = 4\,n^2$ setzt, die kritische Last[1])

$$P = \frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2}{4\,n^2}\,\varrho} \cdot \frac{\pi^2\,E\,J}{L^2} \qquad (26).$$

Für unendliches n ist dies wieder die Eulersche Formel, für endliche Felderzahl zeigt Gl. (26) eine um so größere Abnahme, je schwächer die Diagonalverbindungen sind.

[1]) Eine ähnliche Formel, die jedoch nur unter einigen willkürlichen Annahmen hergeleitet ist, findet sich bei K. Ljungberg. Auf Knickung beanspruchte Gitterstäbe. Der Eisenbau 1922, S. 100 bis 105. Es wird dabei von vornherein vorausgesetzt, daß die Knotenpunkte beider Gurtungen nach der Deformation auf parallelen Kurven liegen und daß die Ausbiegung eines Knotenpunktes das arithmetische Mittel der Ausbiegungen der rechts und links davon liegenden Knotenpunkte ist.

C. Schwache Diagonalen bei endlicher Felderzahl. Es ist von grundsätzlichem Interesse zu erfahren, was der Gitterstab tragen kann, wenn das Gitter im Vergleich zu den Gurtstäben sehr schwach wird. Die für große Felderzahl entwickelte Formel (26) zeigt nur, daß bei einem endlichen n-Wert $p = 0$ wird, wenn ϱ gegen unendlich geht. Auf die Frage, wie groß $p' = \varrho p$ wird, gibt aber diese Gleichung keine unmittelbare Antwort.

Setzt man in Gl. (21′) $p = 0$, so wird

$$y_{\nu+1} - 2y_\nu + y_{\nu-1} = p'(y_{\nu+2} - 2y_\nu + y_{\nu-2})$$

mit den Randbedingungen

$$y_0 = -y_1, \quad y_{-1} = y_1, \quad y_{n+1} = y_{n-1}, \quad y_{n+2} = y_{n-2}.$$

Das allgemeine Integral lautet

$$y_\nu = A\cos\nu z + B\sin\nu z + C,$$

wobei mit $y_\nu = e^{\nu z i} = x^\nu$ der Wert x der Gleichung (vergl. oben unter A)

$$x - 2 + 1/x = p'(x^2 - 2 + 1/x^2)$$

genügen muß. Damit erhält man

$$2(\cos z - 1) = -4p'\sin^2 z \qquad \text{oder} \qquad p' = \frac{1}{4\cos^2\frac{z}{2}}.$$

Nun ergeben die beiden ersten Randbedingungen $B\sin z = -B\sin z$, also $B = 0$ und dann $C = -A\cos^2 z/2$; die beiden Symmetriebedingungen

$$A\cos(n+1)z = A\cos(n-1)z, \qquad A\cos(n+2)z = A\cos(n-2)z$$

und somit $z = \pi/n$. Daher ist

$$p' = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{2n}}$$

und aus Gl. (13) die kritische Last

$$P = E'F'\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2n}} \sim E'F'\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot\left(1 + \frac{\pi^2}{4n^2}\right) \quad . \quad . \quad (27).$$

Bei sehr schwacher Vergitterung wird die Tragfähigkeit lediglich durch den Querschnitt der Gitterstäbe begrenzt; daß die Knicklast P mit wachsender Felderzahl n abnimmt, liegt daran, daß mit n die Länge L des Trägers zunimmt, die sonst in Gl. (27) nicht enthalten ist.

12. Der Gitterstab. Diskussion des allgemeinen Falles. Die Differenzengleichung (21′) wird integriert durch

$$y_\nu = A\cos\nu z + B\sin\nu z + C\operatorname{Cos}\nu z' + D\operatorname{Sin}\nu z',$$

wofern $x = e^{zi}$ und $x' = e^{z'i}$ der Bedingung genügen, die man durch Einsetzen von $y_\nu = x^\nu$ in Gl. (21′) erhält. Diese Bedingung lautet:

$$x - 2 + 1/x = -p(x + 2 + 1/x) + p'(x^2 - 2 + 1/x^2)$$

oder

$$(x + 1/x)^2 - \frac{1+p}{p'}(x + 1/x) + 2\,\frac{1 - p - 2p'}{p'} = 0.$$

Von den zwei Lösungen dieser Gleichung für $x + 1/x$ als Unbekannte ist die eine kleiner als 2, die andere größer als 2. Wir setzen die erstere gleich $2\cos z$, die andere gleich $2\operatorname{Cos} z'$. Es sind daher

$$\frac{1+p}{2p'} = \cos z + \operatorname{Cos} z', \qquad \frac{1 - p - 2p'}{2p'} = \cos z\operatorname{Cos} z'.$$

Nun verlangen die Randbedingungen (22′), wenn man die beiden ersten in der Form $y_1 = y_{-1}$, $y_0 = -\frac{1}{2}(y_1 + y_{-1})$ anschreibt

$$2B\sin z + 2D\operatorname{Sin} z' = 0, \qquad A(1 + \cos z) + C(1 + \operatorname{Cos} z') = 0,$$

$$A[\cos(n+1)z - \cos(n-1)z] + B[\sin(n+1)z - \sin(n-1)z]$$
$$+ C[\operatorname{Cos}(n+1)z' - \operatorname{Cos}(n-1)z'] + D[\operatorname{Sin}(n+1)z' - \operatorname{Sin}(n-1)z'] = 0,$$

$$A[\cos(n+2)z - \cos(n-2)z] + B[\sin(n+2)z - \sin(n-2)z]$$
$$+ C[\operatorname{Cos}(n+2)z' - \operatorname{Cos}(n-2)z'] + D[\operatorname{Sin}(n+2)z' - \operatorname{Sin}(n-2)z'] = 0.$$

Die gleich Null gesetzte Determinante dieser Gleichungen ist die Knickbedingung (vgl. **11**) und man gewinnt nach einiger Umformung, unter Beachtung des Additionstheorems für goniometrische bzw. für Hyperbelfunktionen die Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2}\cdot\operatorname{tg} nz = -\operatorname{Tg}\frac{z'}{2}\cdot\operatorname{Tg} nz'.$$

Drückt man diese Funktionen von z und z' durch $\cos z$ bzw. $\operatorname{Cos} z'$ aus, so erhält man einen in diesen beiden Variablen symmetrischen Ausdruck und ein solcher läßt sich stets durch Summe und Produkt der Variablen darstellen. Da nun $\cos z + \operatorname{Cos} z' = \frac{1+p}{2p'}$ und $\cos z \cdot \operatorname{Cos} z' = \frac{1-p-2p'}{2p'}$ war, so entsteht eine Gleichung zwischen p und $p' = \varrho \cdot p$.

Zum Beispiel gelten für $n = 2$

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2}\cdot\operatorname{tg} 2z = \frac{2\cos z\,(1+\cos z)}{2\cos^2 z - 1}, \qquad \operatorname{Tg}\frac{z'}{2}\cdot\operatorname{Tg} 2z' = \frac{2\operatorname{Cos} z'\,(1-\operatorname{Cos} z')}{2\operatorname{Cos}^2 z' - 1}.$$

Durch Gleichsetzen und Reduzieren wird

$$2\cos z \operatorname{Cos} z' - (\cos z + \operatorname{Cos} z') + 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad p\,(3 + 2\varrho) = 1,$$

d. i. die im dritten Beispiel direkt abgeleitete Gleichung (15).

Für größere n verfährt man einfacher graphisch, indem man zu $\cos z$ bzw. $\operatorname{Cos} z'$ als Abszissen die Funktionen $-\operatorname{tg} z/2 \operatorname{tg} n$ bzw. $\operatorname{Tg} z'/2 \cdot \operatorname{Tg} nz'$ als Ordinaten aufträgt, die Punkte gleicher Höhe zusammenfaßt und aus deren Abszissen das arithmetische Mittel und das Produkt bildet. Man gewinnt so eine Kurve mit den Koordinaten $\xi = {}^1/_2\,(\cos z + \operatorname{Cos} z)$, $\eta = \cos z \operatorname{Cos} z'$ (Abb. 11), die man zufolge der Beziehungen $2\,\xi = \frac{1+p}{2p'}$, $\eta = \frac{1-p-2p'}{2p'}$ in eine p, p'-Linie verwandeln kann. Die Umwandlung ist linear, d. h. einer Geraden in ξ, η entspricht eine Gerade in p, p'. Die Konstruktion zeigt, daß die p, p' Linien nicht merklich von Geraden abweichen. Für $n = 2$ ist es exakt die Gerade $3p + 2p' = 1$, für sehr große n-Werte die Gerade $16n^2 p + 4\pi^2 p' = \pi^2$ (**11**, Grenzfall B). In Abb. 12 sind als Abszissen die Werte p' zu den Ordinaten $\frac{4}{\pi^2}(2n-1)^2 p$ verzeichnet;

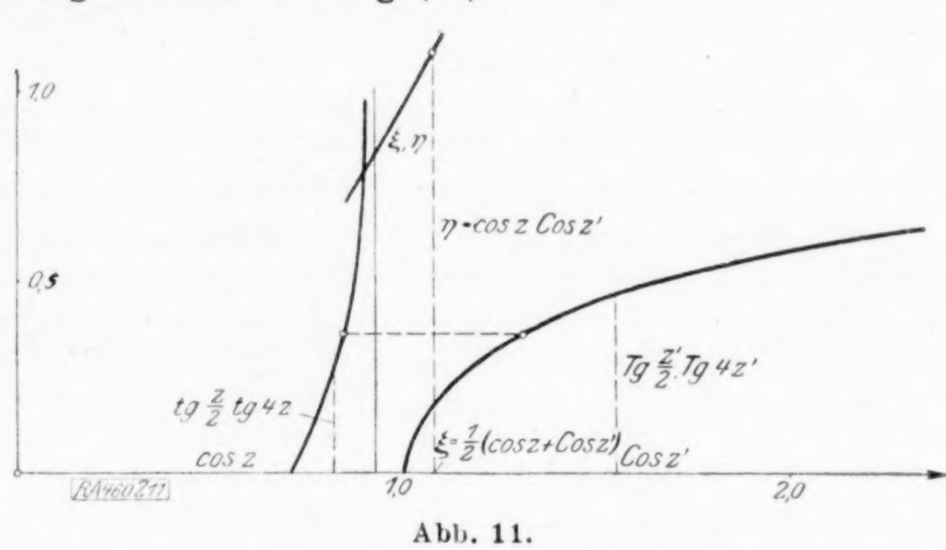


Abb. 11.

es wurden die beiden Geraden $n = 2$ und $n = \infty$ eingetragen und dann die aus A) und C) berechneten Punkte, die auf den Achsen liegen, geradlinig verbunden. Nimmt man diese Geraden als Näherungslösung an, so hat man für die Gerade, die durch die Punkte

$$p = 0, \quad p' = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}, \qquad p' = 0, \quad p = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4n-2}$$

hindurchgeht, die Gleichung

$$p \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4n-2} + 4p'\cos^2\frac{\pi}{2n} = 1.$$

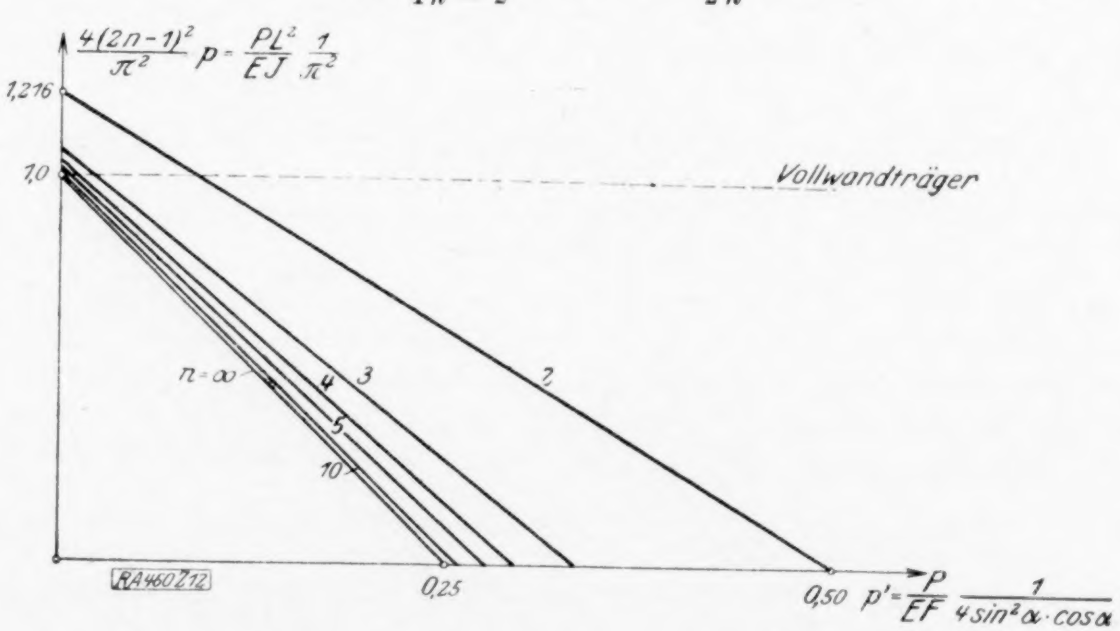


Abb. 12.

Setzt man hier $p' = \varrho p$, löst nach p auf, führt dann für p seinen Wert $Pl^2 : EJ\pi^2$ ein, so erhält man als Gesamtergebnis die kritische Last für den Gitterträger

$$P = \frac{k^2}{1 + \lambda \cdot \varrho} \pi^2 \frac{EJ}{L^2} \qquad (28)$$

mit

$$\varrho = \frac{EF}{E'F'} \frac{1}{2 \cos^3 \alpha}, \qquad k^2 = \left(\frac{4n-2}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2}\right)^2, \qquad \lambda = \left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2} \cdot \cos \frac{\pi}{2n}\right)^2.$$

Nachfolgend sind für einige Werte n die Koeffizienten k^2 und λ zusammengestellt. Es sind für

n	k^2	λ
$n = 2$	$k^2 = 1{,}216$	$\lambda = 0{,}6667$
3	1,070	0,3167
4	1,035	0,1778
5	1,020	0,1125
10	1,004	0,0269
∞	1	0.

Damit ist man in Stand gesetzt, mit der für die Praxis erforderlichen Genauigkeit die Tragfähigkeit des Gitterträgers bei jeder Felderzahl und jedem Stärkeverhältnis zwischen Gurt und Vergitterung zu beurteilen.

13. Bemerkung über das sog. seitliche Ausknicken ebener Fachwerkträger. Wir gehen von dem im dritten Beispiel behandelten ebenen Fachwerkträger aus und wollen ihn jetzt als ein räumliches Fachwerk ansehen. Wenn das räumliche System statisch bestimmt gelagert sein soll, so müssen wir noch drei Knoten, z. B. die Punkte 0, 4 und 1 (oder 3) in Richtung senkrecht zur Tragwerk-Ebene — in der z-Richtung — festlegen. Die Verschiebungen der Knotenpunkte sind wie früher δy_1, δy_2, δy_3 und noch dazu in der z-Richtung δz_3. Die Reaktionen in 0 und 4 sind nun in der y-Richtung dieselben wie vorher, die in der z-Richtung sind in den Knoten 0, 4 und 1

$$\frac{P}{4a} \delta z_3, \quad -\frac{P}{4a} \delta z_3, \quad 0,$$

wie man aus den Momentengleichungen sofort erkennt. Die Stabkraftzuwächse der einzelnen Stäbe haben die gleichen Werte wie beim Beispiel 3, da die Zusätze, die infolge der z-Verschiebung in der x-y-Ebene entstehen, von zweiter Kleinheitsordnung sind. Somit kommt zu den früheren Knickbedingungen noch die hinzu:

$$P \cdot \delta z_3 = 0.$$

Daraus geht hervor, daß in der Richtung senkrecht zur Systemebene Stabilität nur bestehen kann, wenn man die Biegungssteifigkeit berücksichtigt oder wenn man die Knotenpunkte in der Querrichtung elastisch stützt.

Wir untersuchen nun die Seitenstabilität des Gitterträgers, unseres vierten Beispiels, wobei jeder Knoten des Obergurts und des Untergurts in der z-Richtung elastisch gestützt sei, während nur die Endpunkte fest gelagert sind. Drei aufeinanderfolgende Knotenpunkte eines Gurtstabes, die je den Abstand a voneinander haben, bezeichnen wir mit $\varkappa - 1$, $\varkappa$, $\varkappa + 1$, die zugehörigen Ausbiegungen in der Querrichtung mit $z_{\varkappa-1}$, $z_\varkappa$, $z_{\varkappa+1}$. Die Auflagerkraft im Knoten $\varkappa$

$$Q_\varkappa = \frac{P}{2a} (-z_{\varkappa+1} + 2 z_\varkappa - z_{\varkappa-1})$$

setzt man jetzt als Bedingung für die elastische Stützung proportional der Ausbiegung $z_\varkappa$

$$Q_\varkappa = k \cdot z_\varkappa.$$

k ist die Auflagerkraft bei der Durchbiegung 1, $1 : k$ ist die Ausbiegung bei der Auflagerkraft 1. Man erhält somit die Differenzengleichung

$$z_{\varkappa+1} - 2 z_\varkappa + z_{\varkappa-1} = -k \cdot \frac{2a}{P} z_\varkappa$$

mit den Randbedingungen $x = 0$, $z_0 = 0$; $x = na = L$, $z_n = 0$. Das allgemeine Integral ist

$$z_\varkappa = A \cos \varkappa v + B \sin \varkappa v,$$

wobei mit $z_\varkappa = e^{\varkappa v i} = x^\varkappa$ der Wert x der Gleichung

$$x - 2 + 1/x = \varkappa$$

genügen muß. Damit entsteht

$$\varkappa = k \frac{2a}{P} = 4 \sin^2 \frac{v}{2}.$$

Aus den Randbedingungen folgen $A = 0$, $B \sin n v = 0$, also

$$v = 0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} \; \ldots .$$

und daher

$$P = \frac{k}{2} \frac{L}{n \sin^2 \frac{\pi}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29),$$

(denn $v = 0$ liefert ein unendliches P). Man kann nun bei einer praktischen Berechnung z. B. die Forderung aufstellen, daß die Querstützung, d. i. der Wert k, derart gewählt wird, daß das aus Gl. (29) bestimmte P mindestens gleich dem kritischen Wert für das Ausknicken in der Systemebene ist.

Im Grenzfall der stetigen elastischen Querstützung geht die oben angesetzte Differenzengleichung

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = -\frac{2k}{aP} \cdot z$$

in die Differentialgleichung

$$z'' = -\frac{2k}{aP} z$$

über. Da dies dieselbe Beziehung ist, die sich bei der Berechnung der Knicklast eines einteiligen Stabes ergibt, können wir schreiben

$$\frac{2k}{aP} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

und mit $k : a = k'$ entsteht

$$P = 2k' \frac{L^2}{\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29'),$$

was auch aus Gl. (29) hervorgeht. Auch diese Beziehung kann in der gleichen Weise wie (29) verwendet werden. 460

Die Torsionsstabilität des dünnwandigen Rohres.[1]

Von **E. SCHWERIN** in Berlin-Halensee.

Ein kreiszylindrisches, dünnwandiges Rohr, das durch entgegengesetzt gleiche Drehmomente an seinen Enden auf Verdrehen beansprucht ist, wird, sobald die Torsionsspannung ein gewisses kritisches Maß überschreitet, in einen labilen Gleichgewichtszustand übergehen. Je nach dem Verhältnis von Länge, Halbmesser und Wandstärke zueinander wird die Labilität sich mehr in einem seitlichen Ausweichen des Rohres als Ganzes ohne merkliche Querschnittsdeformation oder in einer starken Faltung und Ausbeulung der Querschnitte äußern. Während das Ausweichen langer Stäbe von zwar kleinem, aber vollem Querschnitt bereits von Greenhill[2]) behandelt wurde, scheint die Frage des Ausbeulens ringförmiger Querschnitte, insbesondere auch kurzer Rohre, die z. B. für die sehr dünnwandigen metallenen Holme, Steuerorgane, Rümpfe gewisser Flugzeugtypen von Wichtigkeit ist, noch nicht näher untersucht zu sein, und sei daher im folgenden eingehend behandelt[3]).

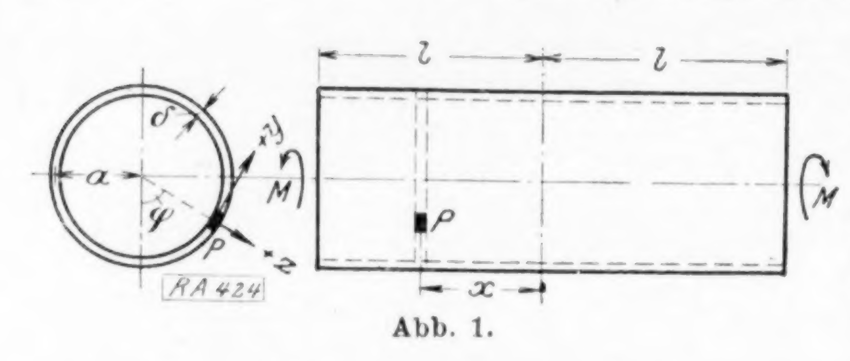
1. Aufstellung der Grundgleichungen. Ein dünnwandiges Rohr von der Wandstärke δ, dem Halbmesser a der Mittelfläche, der Länge $2l$ aus homogenem Material (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl σ) werde durch zwei an seinen Enden angreifende, entgegengesetzt gleiche, achsiale Drehmomente auf Verdrehung beansprucht.

Um den Spannungs- und Formänderungszustand zu kennzeichnen, werde im Punkte P (Abb. 1) durch je zwei benachbarte Schnitte längs der Erzeugenden bzw. quer zur Rohrachse ein unendlich kleines sektorförmiges Rohrelement herausgeschnitten, dessen Lage durch seinen in der Längsrichtung gemessenen Abstand vom Mittelquerschnitt des Rohres sowie den Zentriwinkel gegen einen festen Achsenschnitt bestimmt sei.

[1]) Vortrag gehalten auf dem I. Internationalen Congreß für angewandte Mathematik und Mechanik in Delft 1924.

[2]) A. G. Greenhill, Proceedings of the Institutions of Mechanical Engineers, 1883, S. 183.

[3]) Die erste Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Reißner.


Abb. 1.

Der Punkt P werde zum Aufangspunkt eines Koordinatensystems gewählt, dessen positive x-Achse in Richtung der Rohrachse nach links weist und dessen y- und z-Achse in die Richtung der Tangente bzw. des Radius fallen. Auf die nach wachsendem x und y hin gelegenen Seitenflächen des Zylinderelements wirken dann folgende, auf die ganze Wandstärke δ und die Längeneinheit bezogenen Resultanten von Kräften und Momenten:

längs des Querschnitts des Rohres:

gleichmäßig über die Wandstärke verteilte Normalspannungen als Zugspannungen positiv, mit der Resultierenden T_1; linear mit dem Abstand von der Mittelfläche wachsende Biegungsspannungen, statisch gleichwertig einem Kräftepaar vom Moment G_1, positiv, wenn auf Zubiegung der Schale hinwirkend;

Schubspannungen in Richtung der z-Achse mit der Resultierenden N_1;

Torsionsspannungen statisch gleichwertig einem Torsionsmoment H, positiv, wenn entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehend;

Schubspannungen in Richtung der y-Achse mit der Resultierenden S_1;

längs der Zylindererzeugenden:

analoge Spannungsresultanten T_2, N_2 und Spannungsmomente G_2, gleichfalls als zubiegende Momente positiv;

Schubspannungen in Richtung der negativen x-Achse mit der Resultierenden S_2;

Torsionsspannungen, gleichwertig einem Torsionsmoment H positiv im Sinne des Uhrzeigers.

Die Formänderung der Schale sei in folgender Weise gekennzeichnet:

u, v, w die in die Richtungen der bzw. x, y, z-Achsen fallenden Verschiebungskomponenten von P.

ε_1, ε_2 in der Mittelfläche gemessene Dehnungen in Richtung der Erzeugenden bzw. senkrecht dazu.

ω Winkelverkleinerung des ursprünglich rechten, von den positiven x- und y-Richtungen eingeschlossenen Winkels.

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ Krümmungsänderungen in Richtung der Erzeugenden bzw. senkrecht dazu, als Aufbiegungen positiv.

τ der gegenseitige Verdrehungswinkel zweier auf derselben Erzeugenden im Abstand der Längeneinheit liegender Querschnittselemente, positiv im Sinne von H.

Bezeichnet σ die Querkontraktionszahl und wird zur Abkürzung:

$$D = \frac{E\,\delta^3}{12\,(1-\sigma^2)}$$

gesetzt, so sind nach Love[1]) die Spannungsresultanten bzw. Spannungsmomente mit den Formänderungen in folgender Weise verbunden:

$$T_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_1 + \sigma\,\varepsilon_2), \qquad G_1 = -D\,(\varkappa_1 + \sigma\,\varkappa_2),$$

$$T_2 = \frac{12\,D}{\delta^2}(\varepsilon_2 + \sigma\,\varepsilon_1), \qquad G_2 = -D\,(\varkappa_2 + \sigma\,\varkappa_1),$$

$$S_1 = \frac{12\,D}{\delta^2}\,\frac{1-\sigma}{2}\,\omega = S, \qquad H = D\,(1-\sigma)\,\tau,$$

$$S_2 = -S_1 - H/a.$$

Ferner ergeben sich aus den von Love angegebenen allgemeinen Beziehungen, wenn zur Abkürzung:

$$\xi = x/a, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} = u', \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = u^{\bullet}$$

geschrieben wird, folgende Formänderungs-Verschiebungsgleichungen:

$$a\,\varepsilon_1 = u', \qquad a^2\varkappa_1 = w'',$$

$$a\,\varepsilon_2 = v^{\bullet} + w, \qquad a^2\varkappa_2 = w^{\bullet\bullet} - v^{\bullet},$$

$$a\,\omega = v' + u^{\bullet}, \qquad a^2\,\tau = w^{\bullet\prime} - v',$$

[1]) Love, Treatise on the Theory of Elasticity, vol. II, S. 221 ff.

während die Gleichgewichtsbedingungen, die hier wie bei allen Stabilitätsproblemen auf die deformierte Schale zu beziehen sind, lauten:

$$\left.\begin{aligned} T_1' - S_2^{\bullet} - r_1' S_1 - r_2' T_2 + q_1' N_1 + q_2' N_2 &= 0 \\ S_1' + T_2^{\bullet} - p_1' N_1 - p_2' N_2 + r_1' T_1 - r_2' S_2 &= 0 \\ N_1' + N_2^{\bullet} - q_1 T_1 + q_2' S_2 + p_1' S_1 + p_2' T_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(III)},$$

$$H' - G_2^{\bullet} - r_1' G_1 + H r_2' + N_2 a = 0,$$

$$G_1' - H^{\bullet} + r_1' H - G_2 r_2' - N_1 a = 0,$$

wo:

$$p_1' = a \tau, \qquad p_2' = -1 + a \varkappa_2,$$

$$q_1' = -a \varkappa_1, \qquad q_2' = -a \tau,$$

$$r_1' = \omega' - \varepsilon_1^{\bullet}, \qquad r_2' = \varepsilon_2'.$$

Solange nun die Größe der an den Stabenden wirkenden Drehmomente M_D einen gewissen Betrag nicht überschreitet, das Rohr also noch seine gerade, kreisringförmige Form besitzt, wird sich ein — durch den Index 0 als Ausgangszustand gekennzeichneter — Spannungszustand einstellen, der durch folgende Werte der Spannungen und Formänderungen bestimmt ist:

$$T_{1_0} = T_{2_0} = 0, \quad u_0 = w_0 = 0, \quad G_{1_0} = G_{2_0} = 0, \quad H = 0 \quad \ldots \quad (1),$$

$$S_0 = \frac{M_D}{2 \pi a^2} = \frac{12 D}{\delta^2} \frac{1-\sigma}{2} \omega_0, \qquad v_0 = \omega_0 x = \frac{M_D (1+\sigma)}{\pi a^2 \delta E}.$$

Erreicht jedoch die Größe der Drehmomente den kritischen Wert, so wird neben diesem Grundzustand noch ein anderer, demselben gewissermaßen benachbarter, mit nur sehr wenig von ersterem verschiedenen Spannungen und Formänderungen möglich sein, der ebenfalls den Randbedingungen genügt. Werden also die Spannungen und Verschiebungen dieses letzteren Zustandes mit gewöhnlichen Buchstaben, die zum Grundzustand (1) hinzuzufügenden, sehr kleinen Zusatzspannungen und Verschiebungen durch überstrichene gekennzeichnet, so ist:

$$S = S_0 + \bar{S}, \qquad v = v_0 + \bar{v} \text{ usw.} \quad \ldots \quad (2).$$

Führt man dann Ansatz 2) in (I), (II), (III) ein, so erhält man, wenn die Produkte der sehr kleinen überstrichenen Größen vernachlässigt werden, aus den Gleichgewichtsbedingungen (III) nach Elimination von $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$:[1])

$$\left.\begin{aligned} T_1' + S^{\bullet} + H^{\bullet}/a - v''/a\, S_0 &= 0 \\ S' + T_2^{\bullet} - H'/a + G_2^{\bullet}/a + S_0 \varepsilon_2' &= 0 \\ G_1'' - 2 H^{\bullet\prime} + G_2^{\bullet\bullet} + 2 a^2 \tau S_0 - T_2 a &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(IIIa)},$$

während (I) (II) ungeändert, jedoch mit überstrichenen Größen zu denken sind.

2. Integration der Grundgleichungen. Um nun das vorstehende Gleichungssystem zu integrieren, setzen wir als Partikulärlösung für die Verschiebungen u, v, w an:

$$u = u_0 \sin(m \xi + n \varphi), \quad v = v_0 \sin(m \xi + n \varphi), \quad w = w_0 \cos(m \xi + n \varphi) \quad . \quad (3),$$

wo n eine positive ganze Zahl und u_0, v_0, w_0 Konstante bedeuten, so daß nach (II) und (I):

$$a \varepsilon_1 = u_0 m \cos(m \xi + n \varphi), \qquad a^2 \varkappa_1 = - w_0 m^2 \cos(m \xi + n \varphi),$$

$$a \varepsilon_2 = (v_0 n + w_0) \cos(m \xi + n \varphi), \qquad a^2 \varkappa_2 = -(w_0 n^2 + v_0 n) \cos(m \xi + n \varphi$$

$$a \omega = (v_0 m + u_0 n) \cos(m \xi + n \varphi), \qquad a^2 \tau = - m (w_0 n + v_0) \cos(m \xi + n \varphi),$$

$$T_1 = \frac{12 D}{\delta^2}[u_0 m + \sigma(v_0 n + w_0)] \cos(m \xi + n \varphi), \qquad G_1 = D/a^2 [w_0 m^2 + \sigma n (w_0 n + v_0)] \cos(m \xi + n \varphi),$$

$$T_2 = \frac{12 D}{\delta^2}(v_0 n + w_0 + \sigma u_0 m) \cos(m \xi + n \varphi), \qquad G_2 = D/a^2 [n(w_0 n + v_0) + \sigma w_0 m^2] \cos(m \xi + n \varphi),$$

$$S = \frac{12 D}{\delta^2}(v_0 m + u_0 n) \cos(m \xi + n \varphi), \qquad H = -\frac{D(1-\sigma)}{a^2} m (w_0 n + v_0) \cos(m \xi + n \varphi).$$

Führt man diese Werte für die Spannungsresultanten und Momente in die Gleichgewichtsbedingungen (IIIa) ein, so ergeben sich folgende drei Gleichungen für die Verschiebungen u, v, w:

$$\left.\begin{aligned} u_0 U_1 + v_0 V_1 + w_0 W_1 &= 0 \\ u_0 U_2 + v_0 V_2 + w_0 W_2 &= 0 \\ u_0 U_3 + v_0 V_3 + w_0 W_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(IV)},$$

[1]) Die Striche über den Buchstaben werden im folgenden fortgelassen.

wo, wenn $\frac{\delta^2}{12\,a^2} = \varepsilon$ gesetzt wird:

$$U_1 = -m^2 - n^2\frac{1-\sigma}{2}, \quad V_1 = m\,n\left[-\frac{1+\sigma}{2} + \varepsilon(1-\sigma)\right] + \omega_0\frac{1-\sigma}{2}m^2,$$
$$W_1 = m\left[-\sigma + \varepsilon(1-\sigma)\,n^2\right],$$
$$U_2 = -\frac{1+\sigma}{2}m\,n, \quad V_2 = -n^2 - \frac{1-\sigma}{2}m^2 - \varepsilon\left[n^2 + (1-\sigma)m^2\right] - \omega_0\frac{1-\sigma}{2}m\,n,$$
$$W_2 = -n\left[1 + (n^2+m^2)\right] - \omega_0\frac{1-\sigma}{2}m,$$
$$U_3 = -m\,\sigma, \quad V_3 = -n\varepsilon\left[m^2(2-\sigma) + n^2\right] - n - \omega_0(1-\sigma)\,m,$$
$$W_3 = -\varepsilon(m^2+n^2) - 1 - m\,n\,(1-\sigma)\,\omega_0.$$

3. Aufstellung der Stabilitätsbedingungen. Für die in diesem Gleichgewichtssystem (IV) zu bestimmenden Werte von u_0, v_0, w_0 werden sich nur dann von 0 verschiedene Werte ergeben, und es wird daher eine von der kreiszylindrischen abweichende ausgebeulte Rohrform möglich sein, wenn eine der drei Gl. (IV) die Folge der beiden anderen ist, d. h. wenn die Nennerdeterminante von (IV) verschwindet.

Die Stabilitätsbedingung lautet demnach:

$$\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Va)},$$

oder, in aufgelöster Form, wenn:

$$c_0 = \frac{1-\sigma}{2}\omega_0 = \frac{S_0}{E\,\delta}(1-\sigma^2),$$
$$A\,c_0^2 + B\,c_0 + C = 0,$$

wo, mit: $\sigma = 0{,}25$, wenn ε nur in der ersten beibehalten wird:

$$A = m^2/4\left[m^2(13\,n^2 - 9) + 3\,n^2(n^2-1)\right],$$
$$\frac{B}{m\,n} = {}^{13}/_8\, m^6\varepsilon + m^4/8\left[6 + \varepsilon(29\,n^2 - 20)\right] + m^2/32$$
$$\left[48\,n^2 - 39 + \varepsilon(76\,n^4 - 61\,n^2 - 6)\right] + {}^3/_8\,n^2(n^2-1)(2 + n^2\varepsilon),$$
$$C = {}^3/_8\,m^8\varepsilon + {}^3/_2\,m^6 n^2\varepsilon + {}^9/_{128}\,m^4\left[5 + \varepsilon\{10 + 32\,n^2(n^2-1)\}\right]$$
$$+ {}^3/_2\,m^2 n^2\varepsilon(n^2-1)^2 + {}^3/_8\,n^4\varepsilon(n^2-1)^2.$$

Da diese Bedingungsgleichung vom achten Grade in m ist, wird sie zu jedem als gegeben zu denkenden Wertesystem von ε, n, c_0 acht im allgemeinen voneinander verschiedene Wurzeln liefern; da dann jeder von ihnen einer Partikulärlösung entspricht, wird demnach das vollständige Integral lauten:

$$w = \sum_1^8 w_{0_i}\cos(m_i\xi + n\varphi), \quad v = \sum_1^8 v_{0_i}\sin(m_i\xi + n\varphi), \quad u = \sum_1^8 u_{0_i}\sin(m_i\xi + n\varphi) \quad \text{(3a)},$$

worin die Verhältnisse: v_{0_i}/w_{0_i}, u_{0_i}/w_{0_i} sich aus zweien der drei Gl. (IV) ergeben und die acht willkürlichen Konstanten w_{0_i} so zu bestimmen sind, daß den Randbedingungen in $\xi = +l/a$ und $\xi = -l/a$ Genüge geleistet wird.

4. Randbedingungen. Für diese Randbedingungen kommen hauptsächlich drei Fälle in Betracht, nämlich:

1. Beide Ränder sind vollständig frei,
2. » » » gelenkig gestützt,
3. » » » unter Einspannung der Erzeugenden gestützt.

Dann würden die Randbedingungen folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{zu 1. } T_{1(\pm l/a)} = 0, & S_{(\pm l/a)} - H/a_{(\pm l/a)} = 0, & N_{1(\pm l/a)} - H'/a_{(\pm l/a)} = 0, & G_{1(\pm l/a)} = 0, \\ \text{2. } w_{(\pm l/a)} = 0, & G_{1(\pm l/a)} = 0, & T_{1(\pm l/a)} = 0, & S_{(\pm l/a)} - H\,a_{(\pm l/a)} = 0, \\ \text{3. } w_{(\pm l/a)} = 0, & w'_{(\pm l/a)} = 0, & T_{1(\pm l/a)} = 0, & S_{(\pm l/a)} - H\,a_{(\pm l/a)} = 0 \end{array}\right\} \text{(VII)}.$$

Es sind also an jedem Endquerschnitt vier, demnach acht Bedingungen zu befriedigen, was, wie aus dem folgenden hervorgeht, mit dem obigen Ansatz in den Fällen

1) 2) 3), wie überhaupt immer dann möglich ist, wenn beide Ränder in gleichartiger Weise gelagert sind.

Beschränkt man sich nämlich z. B. — wie wir dies im folgenden der Einfachheit halber tun wollen — im Falle 2) auf die Hauptforderung, daß w in $\xi = \pm l/a$ für jeden Wert von φ verschwinden solle, so liefert diese, wenn: $w = w_{0_1} \cos(m_1 \xi + n \varphi) + w_{0_2} \cos(m_2 \xi + n \varphi)$ die zwei Bedingungen für $\xi = + l/a$:

$$\left.\begin{aligned} w_{0_1} \cos m_1 l/a + w_{0_2} \cos m_2 l/a = 0 \\ w_{0_1} \sin m_1 l/a + w_{0_2} \sin m_2 l/a = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(VI)}$$

und die gleichen Bedingungen für $\xi = - l/a$, so daß dann die Bedingung $w = 0$ in $\xi = - l/a$ von selbst erfüllt ist und nur zwei Werte m für die vollständige Befriedigung der Grenzbedingung $w = 0$ ausreichen. Diese beiden Werte m_1 und m_2 müssen, damit sich aus (IV) von Null verschiedene Werte für w_{0_1} und w_{0_2} ergeben, der Bedingung genügen:

$$\begin{vmatrix} \cos m_1 l/a & \cos m_2 l/a \\ \sin m_1 l/a & \sin m_2 l/a \end{vmatrix} = 0$$

d. h. $\sin [(m_1 - m_2) l/a] = 0$ oder:

$$m_1 - m_3 = \pi a/l\, i, \text{ wo } i = 1, 2, 3 \quad \ldots \ldots \quad \text{(VII a)},$$

wobei natürlich das kleinste kritische Drehmoment sich für $i = 1$ ergibt.

Soll die Lösung 3 a) außer der Bedingung $w = 0$ noch die Bedingung der Einspannung $w' = 0$ erfüllen, so wäre hierzu die Ueberlagerung von vier Partikulärlösungen nötig, also:

$$w = \sum_1^4 w_{0_i} \cos(m_i \xi + n \varphi), \quad v = \sum_1^4 v_{0_i} \sin(m_i \xi + n \varphi), \quad u = \sum_1^4 u_{0_i} \sin(m_i \xi + n \varphi)$$

und es würden in diesem Falle die 4 Werte $m_1\, m_2\, m_3\, m_4$ durch die Beziehung verbunden sein müssen:

$$\begin{vmatrix} \cos m_1 l/a, & \cos m_2 l/a, & \cos m_3 l/a, & \cos m_4 \\ m_1 \sin m_1 l/a, & m_2 \sin m_2 l/a, & m_3 \sin m_3 l/a, & m_4 \sin m_4 l/a \\ \sin m_1 l/a, & \sin m_2 l/a, & \sin m_3 l/a, & \sin m_4 \\ m_1 \cos m_1 l/a, & m_2 \cos m_2 l/a, & m_3 \cos m_3 l/a, & m_4 \cos m_4 l/a \end{vmatrix} = 0,$$

oder aufgelöst:

$$\frac{\dfrac{m_1 - m_2}{\sin [(m_1 - m_2) l/a]}}{\dfrac{m_1 - m_4}{\sin [(m_1 - m_4) l/a]}} = \frac{\dfrac{m_3 - m_2}{\sin [(m_3 - m_2) l/a]}}{\dfrac{m_3 - m_4}{\sin [(m_3 - m_4) l/a]}} \quad \ldots \ldots \quad \text{(VII b)}.$$

5. Auswertung der Stabilitätsbedingung. Um nun den kritischen Wert des Drehmoments oder der ihm entsprechenden Winkelverzerrung c_0 zahlenmäßig zu bestimmen, wäre der direkte Weg der, daß man zunächst bestimmte Werte von c_0 annimmt, für diese bei gegeben zu denkendem n und ε die Wurzeln m von (V) bestimmt und c_0 solange variiert, bis diese Wurzelwerte einzelne Grenzbedingungen — wie (VII a) oder (VII b) oder alle nach (VII) — erfüllen. In diesem Falle wäre der angenommene Wert c_0 ein kritischer, und es wäre dann eine weitere Aufgabe, aus den so gewonnenen Werten c_0 den praktisch allein wichtigen kleinsten zu bestimmen. Mit Rücksicht darauf jedoch, daß die hierbei aufzulösende Gleichung für m vom achten Grade ist, empfiehlt es sich, statt dessen in folgender Weise vorzugehen:

Betrachtet man $\varepsilon = \dfrac{\delta^2}{12\, a^2}$ und n als gegeben, so können für eine Reihe von Werten m die Koeffizienten in A, B, C in (V) ohne weiteres berechnet und die in c_0 quadratische Gleichung (V) nach c_0 aufgelöst werden. Die Bedingungen, die dann zusammengehörige Wurzelwerte m erfüllen müßten, wären dann, daß sie erstens sämtlich dasselbe c_0 ergeben, und zweitens, das sie den Grenzbedingungen (VII) genügen.

Die hierdurch zusammengehörigen Wurzelwerte m sowie das ihnen entsprechende c_0 lassen sich nun — wie auch im folgenden geschehen — am einfachsten auf graphischem Wege finden. Wählt man nämlich m als Abszisse und trägt hierüber die durch Auflösung von (V) nach c_0 gewonnenen Werte c_0 als Ordinaten auf, so liefert die Projektion der Schnittpunkte der c_0-Kurve mit einer beliebigen Horizontalen zusammengehörige

Werte m, und es lassen sich leicht durch Höher- oder Tieferlegen jener Horizontalen diejenigen Wurzeln unter ihnen bestimmen, deren Abstand $m_1 - m_2$ ein ganzes Vielfaches von $\frac{\pi a}{l}$ ist (VIIa) — worauf wir uns im folgenden beschränken wollen —, oder allgemein diejenigen Wurzelwerte, die (VIIb) genügen.

Es wurden daher zunächst für die vier verschiedenen Werte $a/\delta = 25, 30, 40, 50$ sowie $n = 2$ bis 5 die zugehörigen Werte der Koeffizienten A, B, C ermittelt und dann durch Auflösung von (V) nach c_0 die Werte c_0 selbst bestimmt. Auf diesem Weg ergaben sich die in der folgenden Zahlentafel zusammengestellten Werte von c_0 (siehe Zahlentafel 1). Diese Werte c_0 sind in Abb. 2 graphisch aufgetragen, und man erkennt jetzt folgendes:

Zahlentafel 1.

$a/\delta = 25$			$a/\delta = 30$			$a/\delta = 40$					
	m	$1000\,c_0$		m	$1000\,c_0$		m	$1000\,c_0$		m	$1000\,c_0$
$n = 2$	0,2	2,194	$n = 2$	0,15	1,936	$n = 2$	0,10	1,624	$n = 3$	0,30	2,182
	0,25	1,950		0,20	1,576		0,15	1,142		0,40	1,752
	0,30	1,905		0,25	1,438		0,20	0,965		0,45	1,640
	0,35	2,014		0,30	1,469		0,25	0,952		0,50	1,576
	0,40	2,255		0,35	1,625		0,30	1,058		0,55	1,551
				0,40	1,900		0,35	1,270		0,60	1,559
				0,45	2,282		0,40	1,582		0,70	1,660
							0,45	1,993		0,80	1,862
										0,90	2,152

$a/\delta = 50$											
	m	$1000\,c_0$		m	$1000\,c_0$		m	$1000\,c_0$		m	$1000\,c_0$
$n = 2$	0,05	1,997	$n = 3$	0,20	2,037	$n = 4$	0,5	2,121	$n = 5$	1,1	2,187
	0,10	1,006		0,30	1,415		0,6	1,842		1,2	2,105
	0,15	0,739		0,40	1,170		0,7	1,674		1,3	2,054
	0,20	0,662		0,45	1,115		0,8	1,5825		1,5	2,0275
	0,25	0,7085		0,50	1,099		0,9	1,548		1,7	2,081
	0,30			0,55	1,114		1,0	1,560		1,9	2,197
	0,35			0,60	1,153		1,1	1,613			
	0,40			0,70	1,3035		1,2	1,699			
	0,45			0,80	1,539		1,3	1,816			
	0,50			0,90	1,8545		1,5	2,132			
				1,00	2,249		1,7	2,5385			

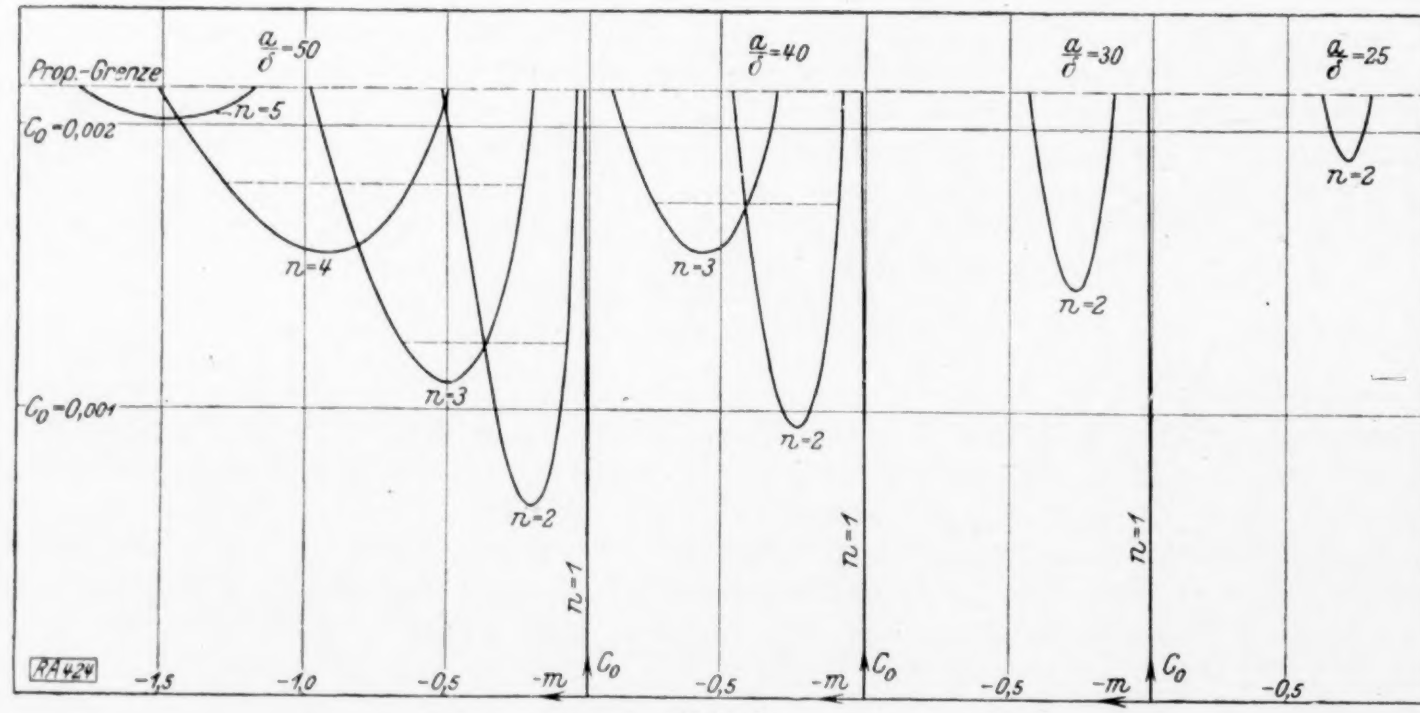


Abb. 2.

Sämtliche Kurven für $n \geqq 2$ zeigen eine parabelähnliche, sich nach oben öffnende Form mit einem tiefsten Wert von c_0, der mit zunehmendem n, d. h. mit zunehmender Querschnittsfaltung stetig wächst.

Die zu jedem n gehörigen $c_{0\,\min}$ lassen sich näherungsweise auch explizit bestimmen. Für $n = 2$ z B. erhält man aus (V) unter Weglassung der höchsten Potenzen von m, das an der Stelle von $c_{0\,\min}$ für obige a/δ den Wert 0,3 nicht überschreitet:

$$A = m^2/4\,(43\,m^2 + 36), \qquad B = {}^3/_2\, m^5 + {}^{153}/_{16}\, m^3 + 18\, m\,(1 + 2\,\varepsilon),$$
$$C = {}^{45}/_{128}\, m^4 + 54\,\varepsilon\,(m^2 + 1),$$

so daß mit Rücksicht auf den sehr kleinen Wert von c_0 gesetzt werden kann:

$$-c_0 \simeq + C/B \simeq \frac{{}^{45}/_8\, m^4_0 + 864\,\varepsilon\,(m^2 + 1)}{48\,m^5 + 153\,m^3 + 288\,m\,(1 + 2\,\varepsilon)}.$$

Diese Funktion von m erreicht, wie die Nullsetzung des Differentialquotienten nach m zeigt, ihr Minimum für

$$m_0 = \sim 4\,\sqrt[4]{0{,}2\,\varepsilon} \simeq 1{,}435\,\sqrt{\delta/a}$$

und es wird daher der Kleinstwert von c selbst:

$$-c_{0\,\min} = \frac{{}^{45}/_8\, m^4 + 864\,\varepsilon\,(m_0^2 + 1)}{48\,m_0^5 + 153\,m_0^3 + 288\,m_0\,(1 + 2\,\varepsilon)}$$

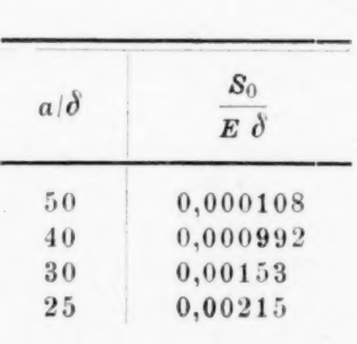
oder mit Rücksicht auf den kleinsten Wert von c_0 nach einigen Umformungen:

$$|c_0|_{\min} = 0{,}232\,(1 + 0{,}45\,\delta/a)\,\delta/a\,\sqrt{\delta/a}$$

mithin die kritische Torsionsspannung für $\sigma = 0{,}25$:

$$\frac{|S_0|}{E\,\delta} = \frac{|c_0|}{1 - \sigma^2} = 0{,}248\,(1 + 0{,}45\,\delta/a)\,\delta/a\,\sqrt{\delta/a}\,.$$

Hiernach ergeben sich folgende in Abb. 3 graphisch veranschaulichten Werte c_0 für $n = 2$:



a/δ	$\frac{S_0}{E\,\delta}$
50	0,000108
40	0,000992
30	0,00153
25	0,00215

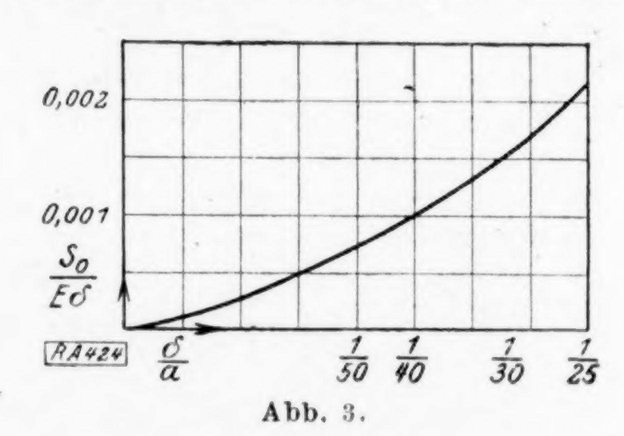


Abb. 3.

Für das lange[1]) Rohr wächst demnach die kritische Torsionsspannung angenähert mit der 1,5 fachen Potenz des Verhältnisses von Wandstärke zu Halbmesser.

Eine besondere Betrachtung erfordern die Fälle $n = 0$ und $n = 1$.

Im Falle $n = 0$ entstehen, wie aus dem Ansatz (3) hervorgeht, überhaupt keine Querschnittsausbeulungen; die Formänderung des Rohres besteht vielmehr in einer schraubenförmigen Verwindung des Ringquerschnitts in sich selbst, unter Beibehaltung der Kreisringform und der geraden Rohrachse, jedoch mit Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Halbmessers. Da die Nennerdeterminante dann nach: (IV)

$$\begin{vmatrix} -m^2 & c_0\,m^2 & -\sigma\,m \\ 0 & -(1-\sigma)\,({}^1/_2 + \varepsilon)\,m^2 & -m\,c_0 \\ -\sigma\,m & -2\,m\,c_0 & 1 - \varepsilon\,m^4 \end{vmatrix} = -m^4\,[(1-\sigma)\,({}^1/_2 + \varepsilon)\,(1 - \sigma^2 + \varepsilon\,m^4) - (2+\sigma)\,c_0^2]$$

wird, erhält man die vierfache Wurzel: $m = 0$ und:

$$c_0 = \sqrt{\frac{(1-\sigma)\,({}^1/_2 + \varepsilon)\,(1 - \sigma^2 + \varepsilon\,m^4)}{2 + \sigma}}.$$

Letzterer Wert muß jedoch stets für reelle Werte von m größer als:

$$c_{0\,\min} \simeq \sqrt{\frac{{}^3/_4 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^{15}\,16}{2 + {}^1/_4}} \simeq 0{,}395$$

sein, liegt daher weit höher als die Proportionalitätsgrenze und kommt, zumal dann die Grundlagen der obigen Theorie nicht mehr gelten, nicht in Frage.

---

[1]) s. unten.

Wie im Falle $n=0$ bleibt auch im Falle $n=1$ die ursprüngliche Kreisringform bei der Deformation erhalten, doch bleibt die Rohrachse jetzt nicht mehr gerade, dieselbe wird vielmehr zu einer Schraubenlinie.

Das dieser Formänderung entsprechende kritische Drehmoment läßt sich in folgender Weise bestimmen:

Aus (V) erhält man für $n=1$:

$$A = m^4$$
$$B = {}^{13}/_8\, m^7 \varepsilon + {}^3/_8\, m^5 (2+3\varepsilon) + {}^9/_{32}\, m^3 (1+\varepsilon)$$
$$C = {}^3/_8\, m^8 \varepsilon + {}^3/_2\, m^6 \varepsilon + {}^{45}/_{128} (1+2\varepsilon) m^4.$$

Für sehr kleine Werte von m kann hierfür geschrieben werden:

$$A = m^4$$
$$B = \frac{(1-\sigma)^2}{2} m^3 (1+\varepsilon) = {}^9/_{32} (1+\varepsilon)\, m^3$$
$$C = \frac{(1-\sigma)^2}{2} (1+\sigma)\, m^4 (1+2\varepsilon) = {}^{45}/_{128} (1+2\varepsilon)\, m^4$$

so daß, da auch c_0 und ε sehr klein, nach (V):

$$-c_0 \simeq + C/B \simeq (1+\sigma)(1+\varepsilon)\, m.$$

Da wie für $n=0$ auch hier $m=0$ eine Wurzel der Stabilitätsbedingung ist, geht der rechte aufsteigende Zweig der für $n=2$ parabelförmigen Kurven im Falle $n=1$ in die vertikale Ordinatenachse ($m=0$) über, während der linke Zweig in eine unter dem Winkel:

$$\operatorname{tg} \alpha = (1+\sigma)(1+\varepsilon)$$

gegen die Horizontale geneigte Gerade ausartet. Da demnach hier: $m_2 - m_1 = 0 - m_1 = -m = \frac{\pi a}{l}$ sein muß, wird: $c_0 = (1+\sigma) \frac{\pi a}{l} (1+\varepsilon)$ und somit das kritische Drehmoment:

$$M_D = 2\pi a^2 \cdot S_0 = 2\pi a^2 \cdot \frac{12\, D}{\delta^2} \cdot c_0 = -\frac{2\pi}{1-\sigma} \frac{a^3 \delta}{l} (1+\varepsilon)$$

oder da das Trägheitsmoment des dünnwandigen Ringquerschnitts:

$$J \simeq 2\pi a^3 \delta$$

auch:

$$|M_D| = \frac{E J}{1-\sigma} \pi/l\, (1+\varepsilon).$$

Bei Vernachlässigung der Querdehnung: $\sigma=0$ würde sich ergeben:

$$|M_D| \simeq E J \cdot \pi/l.$$

Dieser Wert stimmt mit dem bereits von A. Föppl[1]) und Greenhill[2]) für einen langen dünnen auf Torsion beanspruchten Stab von der Länge $2\,l$ gefundenen überein; es ist jedoch bemerkenswert, daß infolge des Einflusses der Querdehnung das kritische Drehmoment sich im Verhältnis $\frac{1}{1-\sigma}$ d. h. bei $\sigma = 0{,}25$ um $33\,{}^1/_3$ vH, bei $\sigma = 0{,}3$ sogar um 43 vH erhöht.

Es kann nun aus Abb. 2 die kritische Torsionsspannung entnommen werden. Beschränkt man sich auf die Forderung $w=0$ in den Endquerschnitten, so hat man nur nötig, diejenige Höhenlage einer Horizontalen zu suchen, für die ihre Schnittpunkte mit den Kurven den gegebenen Abstand $\frac{\pi a}{l}$ aufweisen. Führt man diese Konstruktion durch, so sieht man, daß die Schnittpunkte jener Horizontalen mit den Kurven für $n=2$ in einer gewissen Höhenlage ebensoweit auseinanderliegen wie die Schnittpunkte auf den Kurven für $n=3$, und auf einer noch höheren Stufe wiederholt sich dieses an den Kurven für $n=3$ bzw. $n=4$. Dies bedeutet, daß für die zugehörigen kritischen Werte c_0 der Uebergang aus einer Ausbeulungsform des Querschnitts in die andere stattfindet.

[1]) Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. III, 1. Auflage, 1897, S. 364.
[2]) a. a. O.

Auf diesem graphischen Wege wurden nun für verschiedene Werte von $\frac{\pi a}{l}$ die zugehörigen Werte c_0 entnommen und aus ihnen die Werte $\frac{S_0}{E\,\delta} = \frac{c_0}{1-\sigma^2}$ bestimmt. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt und in Abb. 4 graphisch veranschaulicht.

Zahlentafel 2.

$a/\delta = 25$	$\pi \frac{a}{l}$	$1000 \frac{S_0}{E\delta}$
$n = 2$	0,077	2,08
	0,109	2,13
	0,138	2,19
	0,159	2,24
	0,175	2,29

$a/\delta = 30$	$\pi \frac{a}{l}$	$1000 \frac{S_0}{E\delta}$
$n = 2$	0,098	1,60
	0,148	1,71
	0,183	1,81
	0,213	1,92
	0,245	2,03
	0,270	2,13
	0,289	2,24

$a/\delta = 40$	$\pi \frac{a}{l}$	$1000 \frac{S_0}{E\delta}$
$n = 2$	0,090	1,066
	0,155	1,173
	0,196	1,280
	0,230	1,387
	0,259	1,493
	0,283	1,600
	0,304	1,707
	0,322	1,813
$n = 3$	0,390	1 920
	0,463	2,027
	0,520	2,133
	0,570	2,240

$a/\delta = 50$	$\pi \frac{a}{l}$	$1000 \frac{S_0}{E\delta}$
$n = 2$	0,078	0,747
	0,154	0,853
	0,195	0,960
	0,230	1,067
	0,258	1,173
	0,283	1,280
$n = 3$	0,357	1,387
	0,435	1,493
	0,505	1,600
	0,559	1,707
	0,610	1,813
$n = 4$	0,662	1,920
	0,785	2,027
	0,895	2,133
	0,985	2,240

Abb. 4.

In letzterer kennzeichnen die Knicke in den Kurvenzügen jene Uebergangsstellen von einer Ausbeulungsform in die nächst höhere und man erkennt, daß für verhältnismäßig dicke Rohre (z. B. $a/\delta = 25$) oder für solche großer Länge nur die Ausbeulungsform $n = 2$ in Frage kommt, wenn man mit der kritischen Torsionsspannung mit Rücksicht auf die Grundlagen der obigen Theorie nicht höher als bis zur Proportionalitätsgrenze geht, die hier wie z. B. bei hochwertigem Stahl bei $\frac{S_0}{E\,\delta} \simeq 5000\ \mathrm{kg/cm^2} \simeq 0{,}002213\ E$ angenommen wurde. Wird die Wandstärke jedoch geringer, so kann, wenn die Rohrlänge ein gewisses Maß unterschreitet, auch die Ausbeulungsform $n = 3$ auftreten, bis endlich bei noch weiterer Verminderung von Wandstärke und Rohrlänge, also für sehr kurze dünnwandige Rohre, auch Ausbeulungsformen mit $n = 4$ und noch größeren Werten von n, d. h. mit starker Faltung des Rohrquerschnittes verbundene Formen sich zeigen.

Zugleich erkennt man auch, daß der Fall $n = 1$, d. h. das Ausknicken des Rohres als Ganzes nur für ganz außerordentlich lange Rohre — als untere Grenzlänge ergibt sich nach obigem: $l \geq 2000\,a$ bzw. $6000\,a$ für a/δ 25 bzw. 50 — in Frage kommt; meist wird bereits lange vor Erreichung des zu $n = 1$ gehörigen kritischen $c_{0\,min}$ die Rohrwandung sich zu den Formen $n = 2$ ausgebeult haben.

Die Werte des kritischen Drehmoments, bei denen diese Formänderungen zuerst sich bemerkbar machen, sind der Messung ohne große Schwierigkeit zugänglich, und es wäre wünschenswert, daß die obigen Ergebnisse auch experimentell geprüft würden, wobei allerdings der genauen Verwirklichung der Grenzbedingungen besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden müßte; dann jedoch dürften bei den sicheren Grundlagen der obigen Theorie auch gut mit letzterer übereinstimmende Ergebnisse zu erwarten sein. 424

Über turbulentes Fließen bei glatten Wänden.

Von **J. KOZENY** in Wien.

1. Das Widerstandsgesetz. Beim turbulenten Fließen erfolgt der Durchfluß gleichzeitig in zweierlei Weise. Während im größten Teil des Querschnittes ungeordnete Bewegung (Turbulenz) herrscht, bildet sich an der Wand eine Grenzschichte aus, in der laminarer Abfluß erfolgt. Der Widerstand bei der turbulenten Bewegung ist bekanntlich zweierlei Art, nämlich W_z der sich aus der Zähigkeit der Flüssigkeit ergibt und W_i der infolge Austausch von Impulsgröße durch die überlagerte Pulsationsbewegung entsteht. Beim einfachsten Fall, nämlich beim Fließen zwischen zwei parallelen, glatten und unendlich ausgedehnten Platten herrscht in allen Schnitten normal zur Fließrichtung die gleiche Geschwindigkeitsverteilung und der Austausch an Impulsgröße erfolgt nur in der zu den Platten normalen Richtung. Greifen wir ein prismatisches Flüssigkeitselement heraus mit den genügend kleinen Seitenlängen δx, δy und δz, so wird dasselbe infolge der Zähigkeit einen Widerstand $W_z = \eta \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ erfahren, wobei η der Koeffizient der inneren Reibung und v die Geschwindigkeit der Hauptbewegung ist (Abb. 1). Eine einfache Ueberlegung[1]) ergibt für das genannte Prisma den Widerstand, der durch Austausch von Impulsgröße entsteht

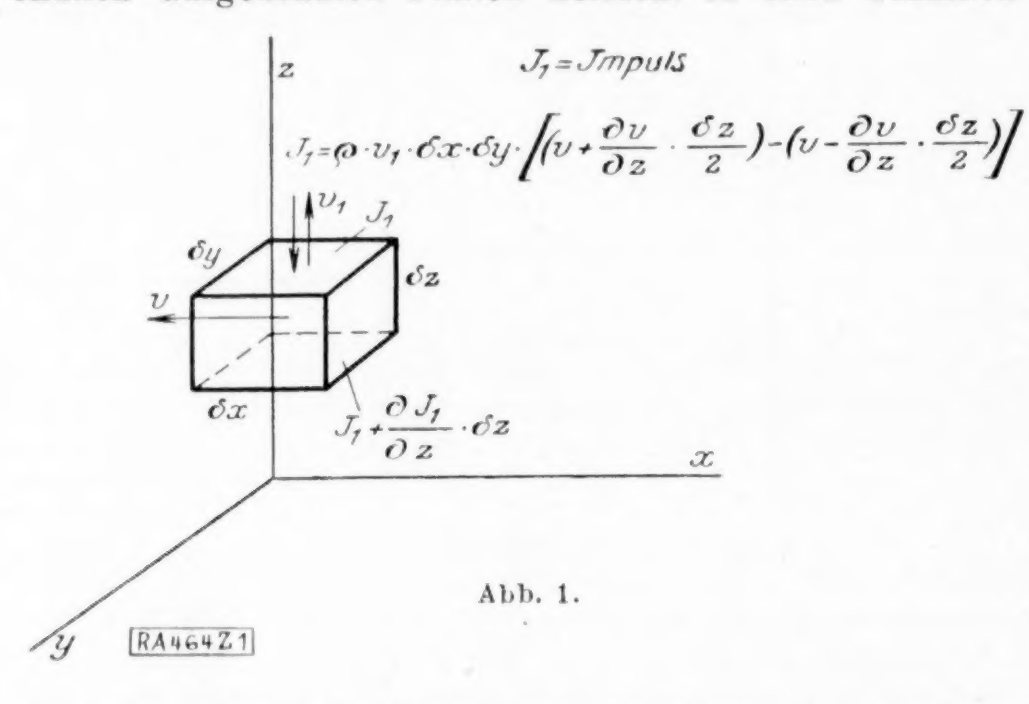


Abb. 1.

$$W_i = \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(v_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta z,$$

wobei ϱ die Dichte und v_1 der über eine hinreichend große Zeit genommene Mittelwert des absoluten Betrages der überlagerten Pulsationsgeschwindigkeit ist[2]). Wir müssen etwa auf jene Zeitspanne beziehen, innerhalb welcher der algebraische Wert von v_1 verschwindet. Die Differentialgleichung für das Fließen ist

$$-\varrho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot g \cdot J = W_z + W_i = \eta \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + \varrho \cdot \delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(v_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wobei J das Druckgefälle, g die Schwerebeschleunigung und ϱ die Dichte darstellen. Bezogen auf die Masseneinheit und bei Einführung des kinematischen Zähigkeitsmaßes ν ergibt sich

$$-g \cdot J = \frac{\partial}{\partial z}\left\{(\nu + v_1 \cdot \delta z)\frac{\partial v}{\partial z}\right\} \quad . \quad . \quad (2) \quad \text{oder} \quad -g \cdot J \cdot z = (\nu + v_1 \cdot \delta z)\frac{\partial v}{\partial z} \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Integrationskonstante ist Null, weil für $z = 0$ (Mitte) $\frac{\partial v}{\partial z}$ verschwindet.

Die Platten haben einen Abstand $2\,H$ und wir legen die eine Koordinatenachse in die Mittellinie. Am Rande haftet das Wasser und bewegt sich längs der Wand laminar

---

[1]) In dem Prismenelement bleibt ein Impuls $\pm \frac{\partial J_1}{\partial z} \cdot \delta z$ und es ist $J_1 = \varrho \cdot v_1 \, \delta x \cdot \delta y \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \delta z$ also erfolgt eine Vermehrung bzw. Verminderung der Bewegungsgröße der Wassermenge im Prisma um $\varrho \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(v_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \delta z$.

[2]) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß diese Pulsationsgeschwindigkeiten nichts zu tun haben mit den Pulsationen in der Flußhydraulik.

in dünner Schichte mit angenähert linearer Geschwindigkeitsverteilung. Man kann für $z = H$ (Rand) . . . $\frac{\partial v}{\partial z} \simeq \frac{v_r}{\vartheta}$ setzen, wenn v_r die Randgeschwindigkeit der laminaren Grenzschichte und ϑ deren Dicke ist. Da dortselbst die Pulsationsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ ist, so ergibt sich

$$- J \cdot g \cdot H \simeq \nu \cdot v_r / \vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Wir gehen von der Vorstellung aus, daß es auch für die Grenzschichte eine Kritische Zahl $R_k' = \frac{v_r \, \vartheta}{2 \, \nu}$ gibt, die nicht überschritten werden darf, wenn in der Entfernung ϑ von der Wand noch laminares Fließen mit der Geschwindigkeit v_r erfolgen soll. So ergibt sich die Gleichung

$$- Jg \cdot H = \frac{v_r^2}{2 \cdot R_k'} = K \cdot \frac{v_r^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

worin K eine konstante Zahl darstellt. Oder es ist

$$- J = K \cdot \left(\frac{v_r}{v_m}\right)^2 \cdot \frac{v_m^2}{2 \, g \, H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

wenn wir die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit v_m einführen. Wir wissen nun daß mit zunehmender mittlerer Geschwindigkeit oder wachsender Reynoldsscher Zahl ein Ausgleich der Geschwindigkeiten im Querschnitt erfolgt; es streben die von der Reynoldsschen Zahl R abhängigen Geschwindigkeitsverhältnisse wenn auch nicht gerade 1, so doch einem bestimmten Grenzwert $0 < \lambda < 1$ zu, wie dies namentlich die Versuche von T. E. Stanton und J. R. Pannell für $\frac{v_m}{v_{max}}$ dartun[1]). Jedenfalls kann man dann schreiben

$$- J = \psi \cdot \frac{v_m^2}{2 \, g \, H} = \{ f(R) + c_2 \} \cdot \frac{v_m^2}{2 \, g \, H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

wobei $f(R)$ die Eigenschaft haben muß für große R zu verschwinden, so daß auch bei glatten Wänden im Gebiete großer Reynoldsscher Zahlen das reine quadratische Widerstandsgesetz gilt; dort verliert das Blasiussche Gesetz, auf dem viele neuere Untersuchungen aufgebaut sind, seine Giltigkeit. Für die Widerstandszahl ψ ergab sich aus den Messungen von Fromm[2]), Saph-Schoder[3]), Blasius[4]) und Stanton, Pannell in sehr guter Uebereinstimmung mit den Versuchen

$$\psi = \frac{c_1}{\sqrt[3]{R}} + c_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

wo c_1 und c_2 Konstante sind, die aus den Versuchen ermittelt werden.

Die Versuche von K. Fromm ergaben für glatte Zinkplatten die Widerstandszahl

$$\psi = \frac{0{,}09667}{\sqrt[3]{R}} + 0{,}00133 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9),$$

wobei als Bezugslänge der hydraulische Radius, also der halbe Plattenabstand eingeführt wurde. Für verschiedene R gibt Gleichung (9) folgende Werte von ψ:

$R \cdot 10^{-3}$	3	4	6	8	10	12	14	16	18	20	24
$\psi \cdot 10^3$	8,03	7,42	6,65	6,16	5,82	5,55	5,34	5,17	5,02	4,89	4,68

Die zeichnerische Darstellung ergibt eine Kurve, welche mit Fromms Messungen recht gut übereinstimmt (Abb. 2). Für kreisförmige glatte Rohre ergeben die Messungen die Gleichung

$$\psi = \frac{0{,}54}{\sqrt[3]{R}} + 0{,}00648 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

[1]) T. E. Stanton und J. R. Pannell, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A. Vol. 214. Pp 199 bis 244. Diese Messungen gehen bis $R = 430\,000$.

[2]) K. Fromm, Abhandlungen aus dem aerodynamischen Institut in Aachen 1924, 3. Lieferung.

[3]) Saph-Schoder, Transact of the American Society of Civ. Eng. Bd. 51 (1903) S. 253.

[4]) H. Blasius, Forschungsarbeiten des Vereines deutscher Ingenieure Heft 131, Berlin 1913 und zwar die Versuche an einem Messingrohr bis zu $R = 210\,000$, Seite 18 und 37, Abb. 14.

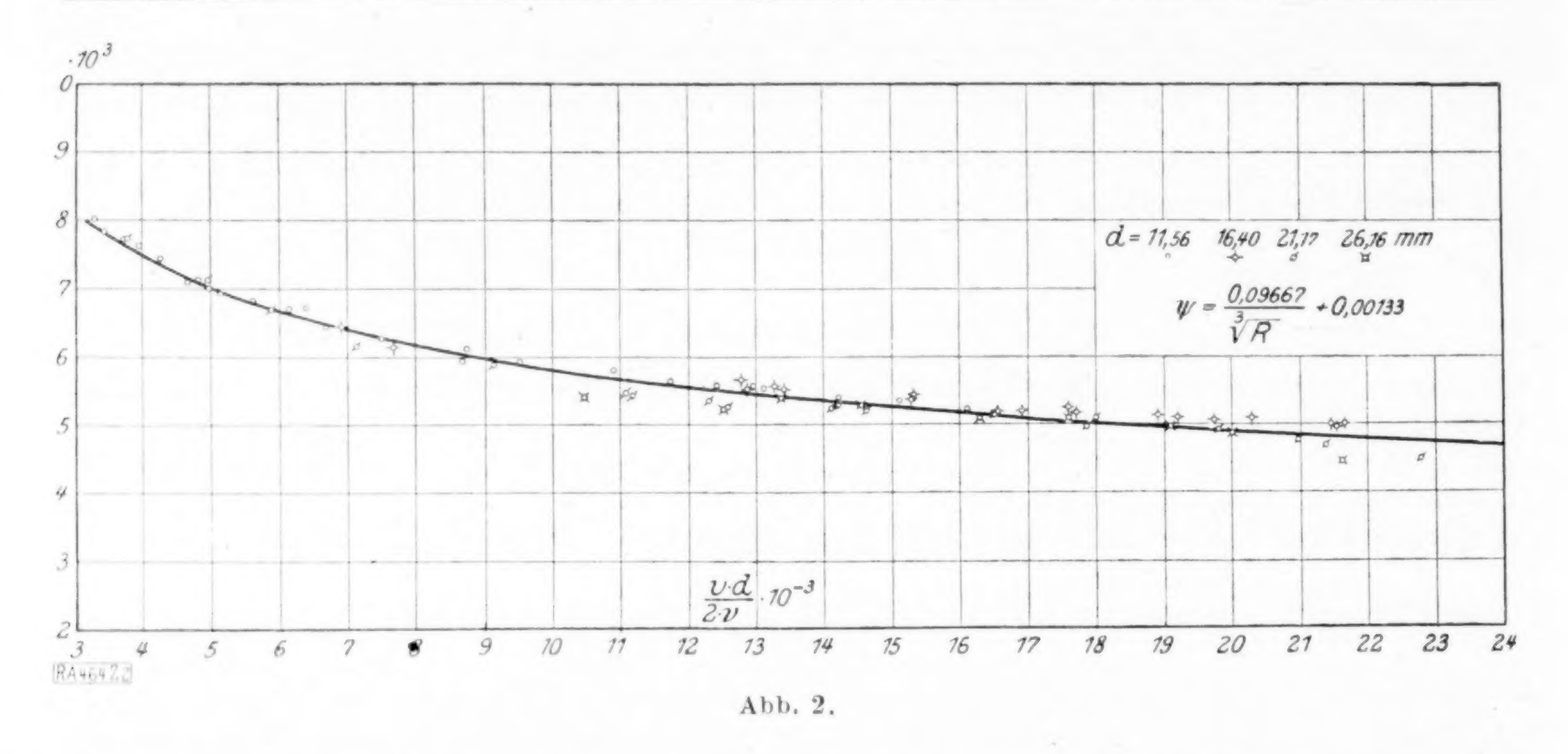


Abb. 2.

deren Rechnungsergebnisse sehr gut mit den bisher bekannten Messungen in ihrem Gesamtbereiche übereinstimmen, während die Formel von Blasius etwa von $R = 80\,000$ beginnend zu kleine Widerstandszahlen angibt. Der Fehler der Blasiusschen Formel wird mit wachsendem R immer größer und beträgt bei $R \sim 400\,000$ schon 10 vH.

Zum Vergleiche ist in der folgenden Zahlentafel auch die Gleichung von Lees[1]) $\psi = 0{,}0072 + 0{,}6104 \cdot R^{-0{,}35}$ ausgewertet worden. In der Abb. 3 wurden die Blasiussche Formel und die neue Formel dargestellt und namentlich mit den Versuchsergebnissen von Stanton und Pannell in Vergleich gesetzt. Dieses Schaubild zeigt deutlich die starke Abweichung des Blasiusschen Widerstandsgesetzes mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen. In den Reynoldsschen Zahlen wurde als Bezugslänge der Durchmesser (wie üblich) eingesetzt. Wenn die Konstanten in (9) und (10) so sehr verschieden sind, so liegt daß darin, daß bei Platten der hydrauliche Radius, bei Röhren der Durchmesser d in der Gleichung $J = \psi \cdot \frac{v_m^2}{2\,g\,H}$ eingeführt wurden. Nimmt man auch bei Röhren den hydraulischen Radius $d/4$, so wird $\psi = \frac{0{,}54}{\sqrt[3]{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}\cdot 4} + \frac{0{,}00648}{4} = \frac{0{,}085}{\sqrt[3]{R}} + 0{,}00162$.

Reynoldssche Zahl R	ψ_{mittel} beobachtet von Saph-Schoder	ψ gerechnet		
		Neue Gleichung	Blasius	Lees
3 000	0,0418	0,04392	0,04275	0,04423
10 000	0,0321	0,03155	0,03164	0,03150
25 000	0,0251	0,02495	0,02516	0,02483
50 000	0,0212	0,02114	0,02115	0,02103
100 000	0,0179	0,01811	0,01779	0,01805
200 000	—	0,01571	0,01505	0,01571
300 000	—	0,01455	0,01352	0,01459
400 000	—	0,01381	0,01258	0,01388

Zum Vergleiche seien einige Beobachtungen von Stanton-Pannell hinzugefügt; letztere fanden folgende zusammengehörige Werte:

$10^{-3} \cdot R$	156	178	236	304	354	402	430	412	415	416
$10^{3} \cdot \psi$	16,24	15,78	15,04	14,08	14,16	13,76	13,90	13,60	13,84	13,80

[1]) Neuerdings haben die Versuche von M. Jakob und J. Erk eine kleine Verbesserung ergeben und zwar soll $\psi = 0{,}00714 + 0{,}6104\,R^{-0{,}35}$ sein. Siehe Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure Nr. 22, Bd. 68 (1924), S. 581.

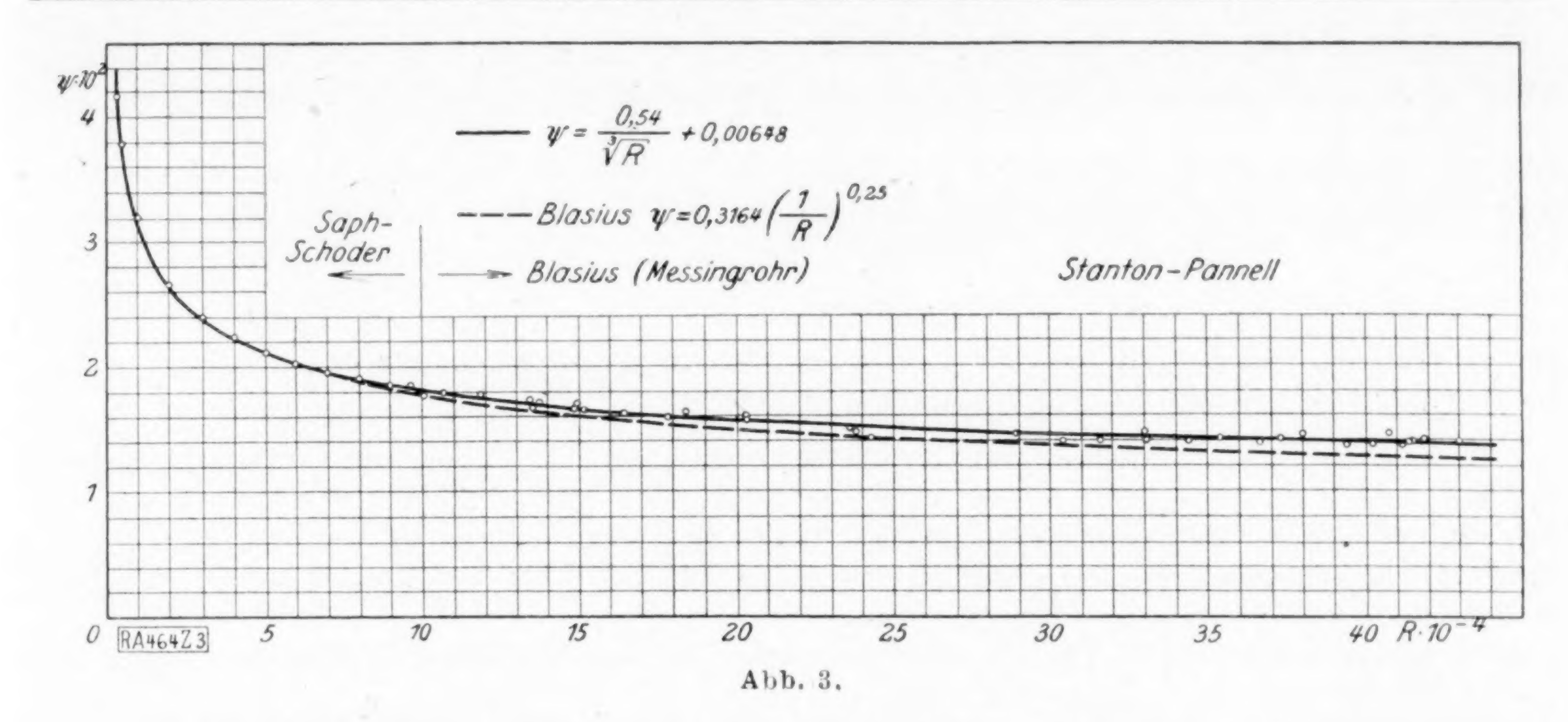


Abb. 3.

2. Versuch einer Erklärung des empirischen Gesetzes. Die Gleichung (3) kann auch geschrieben werden

$$-J = \left(\frac{\nu}{v_1 \cdot \delta z} + 1\right) \cdot \frac{v_1}{g} \cdot \frac{\delta z}{z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,\text{a}),$$

so daß für die Widerstandszahl in irgendeinem Querschnittspunkte gesetzt werden kann

$$\psi \sim \left(\frac{\nu}{v_1 \cdot \delta z} - 1\right) \cdot \text{Konstante}.$$

δz hat blos der Bedingung zu genügen, daß es hinreichend klein ist, um eine Taylorsche Entwicklung $v(z + \delta z) = v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial z} \delta z + \ldots.$ zu ermöglichen. Es ist also vornehmlich die Abhängigkeit der Pulsationsgeschwindigkeit v_1 von R zu ermitteln. Hierzu soll uns das in Abb. 4 dargestellte System behilflich sein. Wir haben da eine bewegte Wand und ein Pendel von der Länge λ, das um seinen Aufhängungspunkt 0 kleine Schwingungen macht. Die Geschwindigkeit der Wand sei v, jene des Pendels beim Durcheilen der Ruhelage v_1. Wir stellen uns die Frage: wann ist ein anderes solches System, bestehend aus Bezugswand und schwingendem Pendel, ähnlich? Offenbar müssen die Längenverhältnisse konstant bleiben, und ebenso dürfen sich die Winkel, welche vektorielle Größen (Geschwindigkeiten) mit einer Bezugsrichtung einschließen, nicht ändern. Es müssen also die Bedingungen erfüllt sein

$$l/\lambda = \text{konstant} = l'/\lambda' \quad \text{und} \quad v/v_1 = \text{konstant} = v'/v_1',$$

also auch $\qquad v \cdot l = \text{Konstante} \cdot v_1 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I}).$

Hierzu gesellt sich noch die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen, und zwar ist die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t,

Abb. 4.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \cdot \varphi_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}} \cdot t\right),$$

worin φ_0 den größten Ausschlagwinkel bedeutet, der natürlich bei geometrischer Aehnlichkeit in beiden Systemen derselbe sein muß. Für den Durchgang durch die Ruhelage ist bekanntlich $t = n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, wo $n = 1, 3, \ldots.$, so daß wir schreiben können

$$v_1 = \lambda \cdot d\varphi / dt = \text{Konstante} \cdot \sqrt{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II}).$$

Definieren wir, daß $\frac{v \cdot l}{\nu} = R$ ist, so können die Gleichungen (I) und (II) nur erfüllt sein, wenn

$$\underline{v_1 = \text{Konstante} \cdot \sqrt[3]{R}} \quad \text{und} \quad \underline{\lambda = \text{Konstante} \cdot \sqrt[3]{R^2}} \quad \text{ist.}$$

Solche kleine Schwingungen können wir bei Turbulenz für die Zusatzbewegung substituieren. v. Mises[1]) beweist, daß die Annahme von Zusatzgeschwindigkeiten, die einige Hundertstel der mittleren Geschwindigkeit betragen, genügt um das gänzlich veränderte Geschwindigkeitsbild der turbulenten Bewegung zu erklären. Die unmittelbare Anwendung vorgehender Betrachtung läßt dann eine Widerstandszahl von der Form

$$\psi = \frac{c_1}{\sqrt[3]{R}} + c_2$$

als sehr wahrscheinlich gelten, was durch die Uebereinstimmung mit den Messungen bis zu Reynoldsschen Zahlen von $R = 430\,000$ am besten bewiesen ist.

3. Die Geschwindigkeitsverteilung. Gleichung (3) kann ohne weiteres gelöst werden, wenn ein passender Ansatz für $v_1 \cdot \delta z$ gemacht wird. Dabei ist es zweckdienlich unbenannte Zahlen, hier Geschwindigkeitsverhältnisse einzuführen, die freilich wieder von der Reynoldsschen Zahl abhängig sind. Ein solcher Ansatz hat vorerst der Forderung zu genügen, daß die Turbulenz am Rande für $z = H$ bzw. für $v/v_r = 1$ verschwindet und ebenso für $R \leqq R_K$ wobei R_K die Kritische Zahl sei, bei welcher laminares Fließen in Turbulenz überschlägt. Es genügt diesen Bedingungen der Ansatz

$$v_1 \cdot \delta z = K \cdot H \cdot v_r \left(1 - e^{\frac{v_r - v}{v_m}} \right) \quad \ldots \ldots \ldots (11),$$

wobei wie schon früher gesagt die Geschwindigkeitsverhältnisse asymptotisch gewissen Endwerten zustreben, ohne daß auch bei höchsten Reynoldsschen Zahlen ein vollständiger Ausgleich erfolgen würde, wie es die vorerwähnten Versuche von Stanton-Pannell als sehr wahrscheinlich hinstellen. Für $R \leqq R_{Krit}$ verschwindet v_r bzw. $(v_r/v_m) \cdot v_m$ also auch die Pulsationsgeschwindigkeit. Es ergibt sich aus Gl (3) mit (11)

$$- J \cdot g \cdot z = \left\{ \nu + K \cdot H \cdot v_r \left(1 - e^{\frac{v_r - v}{v_m}} \right) \right\} \frac{\partial v}{\partial z} \quad \ldots \ldots (12)$$

oder

$$- J \cdot g \cdot z^2/2 = \left\{ \nu\, v + K \cdot H \cdot v_r \left(v + v_m \cdot e^{\frac{v_r - v}{v_m}} \right) \right\} + C \quad \ldots (13)$$

und für den Rand

$$- J \cdot g \cdot H^2/2 = \{ \nu\, v_r + K \cdot H \cdot v_r (v_r + v_m) \} + C \quad \ldots \ldots (14)$$

oder

$$\frac{J\,g}{2} \cdot (H^2 - z^2) = K \cdot H \cdot v_r \left\{ \left(\frac{1}{K \cdot R} \cdot \frac{v_m}{v_r} + 1 \right) \cdot (v - v_r) + v_m \left(e^{\frac{v_r - v}{v_m}} - 1 \right) \right\} \quad (15)$$

und für die Mitte also für $z = 0$ und $v = v_{max}$

$$\frac{J\,g}{2} \cdot H^2 = K \cdot H \cdot v_r \left\{ \left(\frac{1}{K \cdot R} \cdot \frac{v_m}{v_r} + 1 \right) \cdot (v_{max} - v_r) + v_m \left(e^{\frac{v_r - v_{max}}{v_m}} - 1 \right) \right\} \quad (16)$$

und es lautet hiermit das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung

$$1 - z^2/H^2 = \frac{\left(\frac{1}{K \cdot R} \cdot \frac{v_m}{v_r} + 1 \right) (v - v_r) + v_m \left(e^{\frac{v_r - v}{v_m}} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{K \cdot R} \cdot \frac{v_m}{v_r} + 1 \right) \cdot (v_{max} - v_r) + v_m \left(e^{\frac{v_r - v_{max}}{v_m}} - 1 \right)} \quad \ldots (17).$$

Für kleine Reynoldssche Zahlen $R \leqq R_K$ ist $v_m/v_r = \infty$ da für diesen Bereich v_r verschwindet; folglich gilt für $R \leqq R_K$ die Gleichung

$$1 - z^2/H^2 = v/v_{max} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

also eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung. Sind jedoch die Reynoldsschen Zahlen groß (hydraulischer Zustand) so gilt:

$$1 - \frac{z^2}{H^2} = \frac{v - v_r + v_m \cdot \left(e^{\frac{v_r - v}{v_m}} - 1 \right)}{v_{max} - v_r + v_m \cdot \left(e^{\frac{v_r - v_{max}}{v_m}} - 1 \right)} \quad \ldots \ldots \ldots (19).$$

[1]) R. v. Mises, Elemente der techn. Hydromechanik I. Teil, Leipzig 1914, S. 70 bis 71.

Man kann die höheren Glieder der Reihe für $e^{\frac{v_r - v}{v_m}}$, vom 4ten beginnend, vernachlässigen, ohne einen großen Fehler zu begehen, und erhält dann eine elliptische Verteilung nach der Gleichung

$$1 - \frac{z^2}{H^2} = \frac{(v - v_r)^2}{(v_{max} - v_r)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

welche auch gilt für Röhren in der Form

$$1 - \frac{r^2}{a^2} = \frac{(v - v_r)^2}{(v_{max} - v_r)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

wenn r der Abstand von der Rohrachse und a der Rohrhalbmesser ist.

Die pro Zeiteinheit durchströmende Wassermenge ist bei Röhren

$$Q = {}^2/_3\, \pi \cdot (v_{max} - v_r) \cdot a^2 + v_r \cdot a^2 \pi = v_m \cdot a^2 \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

wobei von dem Durchfluß in der sehr dünnen laminaren Grenzschicht abgesehen wird. Es ist weiter

$$v_m = v_r + {}^2/_3\, (v_{max} - v_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

oder

$$\frac{v_m}{v_r} = {}^2/_3 \cdot \frac{v_{max}}{v_r} + {}^1/_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\,a).$$

Für große R ist aus Gl. (16) und mit (5)

$$v_{max} - v_r = \sqrt{\left(\frac{v_m}{v_r}\right) \cdot \frac{J \cdot g \cdot a}{K}} = \sqrt{\frac{v_m \cdot v_r}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Also geht (23) über in

$$\frac{v_m}{v_r} = 1 + {}^2/_3 \cdot \sqrt{\frac{v_m}{2\, v_r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

woraus sich ergibt

$$\frac{v_m}{v_r} = {}^{10}/_9 + \sqrt{\frac{100}{81} - 1} = 1{,}59 \quad . \quad . \quad (26);$$

aus (23a) folgt nun

$$\frac{v_r}{v_{max}} = \frac{6}{7 + \sqrt{19}} = 0{,}528 \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

so daß also weiter

$$\frac{v_m}{v_{max}} = {}^2/_3 + \frac{2}{7 + \sqrt{19}} = 0{,}842 \quad . \quad . \quad (28)$$

folgt.

Es wurde nun die Ellipse in Abb. 5 gezeichnet mit den Halbachsen a und $v_{max} - v_r = v_{max}\,(1 - 0{,}528)$ und ferner die Kurven $v = v_{max}\,\{1 - (r/a)^n\}^{1/7}$ mit $n = 1$ und $n = 2$ eingetragen[1]). Die Ellipse fällt zwischen die genannten Linien und zeigt eine gute Uebereinstimmung mit den Messungen verschiedener Forscher[2]).

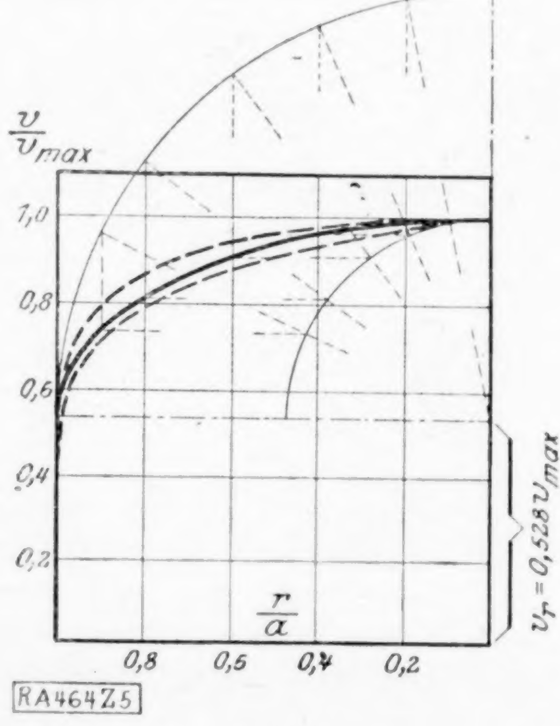


Abb. 5.

Aus (16) folgt das Widerstandsgesetz

$$-J = 4 \cdot K \left(\frac{v_r}{v_m}\right) \cdot \left\{\left(\frac{1}{K \cdot R} \cdot \frac{v_m}{v_r} + 1\right) \frac{v_{max} - v_r}{v_m} + e^{\frac{v_r - v_{max}}{v_m}} - 1\right\} \cdot \frac{v_m^2}{2\, g\, H} \quad . \quad . \quad (29),$$

welches im Prinzip dem im Abschnitt I entwickelten nicht widerspricht. Da — wie wir wissen — die Geschwindigkeitsverhältnisse gewissen Grenzen zustreben, ist dies auch mit der Widerstandszahl der Fall. Sie wäre nach unserem Ansatz nur dann Null, wenn ein vollständiger Ausgleich der Geschwindigkeiten erfolgen würde; die Erfahrung zeigt, daß letzteres nicht eintritt.

---

[1]) Siehe die Abb. 3 in Heft 4 dieser Zeitschr., Bd. 1 (1921), und zwar v. Kármán »Ueber laminare und turbulente Reibung«.

[2]) Nähere Daten siehe »Die Wasserkraft«, 17. Jahrg., Forchheimer-Heft. München 1922.

Wollten wir nach Prandtl-Kármán [1]) aus dem Widerstandsgesetz auf die Geschwindigkeitsverteilung schließen, so würde sich aus (7) bzw. (8) ergeben die Schubspannung

$$\tau \sim (K_1 \cdot v^{5/3} \cdot y^{-1/3} \cdot \nu^{1/3} + K_2 \cdot v^2) \cdot \varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30),$$

wo K_1 und K_2 Konstante sind. Hieraus ist

$$y \sim \frac{\nu \cdot v^5 \cdot K_1{}^3 \cdot \varrho^3}{(\tau - K_2 \varrho v^2)^3} = \frac{\nu \cdot v^5 \cdot K_1{}^3 \varrho^3}{\tau^3} \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3n}{\tau^n} (K_2 v^2 \varrho)^n\right) \quad \ldots \quad (31).$$

In der Nähe der Wand wird bei Beibehaltung des 1. Gliedes der Reihe die Geschwindigkeit mit $y^{1/5}$ wachsen, wenn y der Wandabstand ist, während bei Zugrundelegung des Blasiusschen Gesetzes dies mit $y^{1/7}$ erfolgt [2]). Es sei bemerkt, daß beim Rohr die Gleichung

$$v = v_{\max} \cdot \{1 - (r/a)^2\}^{1/5} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31\,\mathbf{a})$$

sehr gute Uebereinstimmung mit den Messungen zeigt. Ebenso zeigen die Messungen bei geschleppten Platten (siehe Abb. 5 der Arbeit v. Kármán), daß v in der Wandnähe schwächer wächst als nach dem Gesetze $v \sim V\,(y/\delta)^{1/7}$. Hiermit wäre ein indirekter Nachweis für das neue Widerstandsgesetz geliefert. 464

Versuche mit rotierenden Flüssigkeiten. [3])

Von **G. J. TAYLOR** in Cambridge.

(Ins Deutsche übertragen von Cl. v. Simson in Berlin.)

Im allgemeinen kann man sagen, daß die Strömungen, die man beobachtet, wenn Körper in einer Flüssigkeit bewegt werden, nicht den Voraussagen der Hydrodynamik entsprechen. Der Grund liegt darin, daß man gegenwärtig keine befriedigende Methode besitzt, die Grenzbedingungen, die für die Strömung maßgebend sind, in Rechnung zu ziehen. Die hier beschriebenen Versuche wurden unternommen, um festzustellen, ob die Voraussagen der Theorie besser verifiziert werden, wenn die die Natur der Strömung bestimmende Kraft über das Volumen der Flüssigkeit verteilt ist. Die Zentrifugalkraft, die durch Rotation entsteht, ist gleich gut für die theoretische Betrachtung wie für den Versuch geeignet. In den ersten vier der beschriebenen Versuche ist der Nachdruck auf die Unterschiede gelegt, die zwischen der Strömung zu erwarten war, die bei nicht rotierender Flüssigkeit durch irgendeine gegebene Bewegung der Wandungen entsteht und der entsprechenden Strömung bei gleichmäßiger Drehung des gesamten aus Flüssigkeit und Wandungen bestehenden Systems. In jedem Falle wurde das später beobachtete Resultat vor Ausführung des Versuches mathematisch vorausberechnet.

Versuch 1. Abb. 1a. Ein fester Körper von Zylinderform von der gleichen Dichte wie Wasser wird mit Hilfe von Fäden durch Wasser gezogen, die längs eines Durchmessers des Wassergefäßes, das aus Glas besteht, gespannt sind. Dieses runde Gefäß schwimmt in Wasser in einem ähnlichen nur etwas größeren Gefäß und kann durch einen Wasserstrahl, der tangentiell gegen seine äußere Oberfläche gerichtet ist, zur Drehung um eine vertikale Achse gebracht werden. Eine Ansicht des Gefäßes vertikal von oben gesehen wird mit Hilfe einer Lampe und 45°-Spiegeln auf die Tafel projiziert. Abb. 1b zeigt die Anordnung, durch die der Zylinder durch das Gefäß gezogen wird, wenn das ganze System eine gleichmäßige Drehung erreicht hat. Die den Zylinder schleppenden Fäden liegen unter der Mittellinie einer Zelluloidbrücke, die man im Projektionsbild rotieren sieht.

Der Versuch besteht nun darin, zu zeigen, daß der Zylinder sich unter der Mittellinie der Brücke bewegt, d. h. in der Richtung, in der die Fäden ihn ziehen. Eine Kugel dagegen wird, wenn sie unter den gleichen Bedingungen gezogen wird, nach

[1]) Diese Zeitschr., Heft 4 (1921).

[2]) Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Herausgegeben von v. Kármán und Levi-Civita, Berlin 1924, S 160.

[3]) Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Kongreß für Mechanik in Delft 1924. Für die freundliche Ueberlassung der Bildstöcke zu den auf den beiden Tafeln vereinigten Abbildungen ist die Schriftleitung den Herren Prof. Ir. C. B. Biezeno und Prof. Dr. J. M. Burgers zu Dank verbunden.

Aufsatz: **Versuche mit rotierenden Flüssigkeiten.** Von G. J. Taylor.

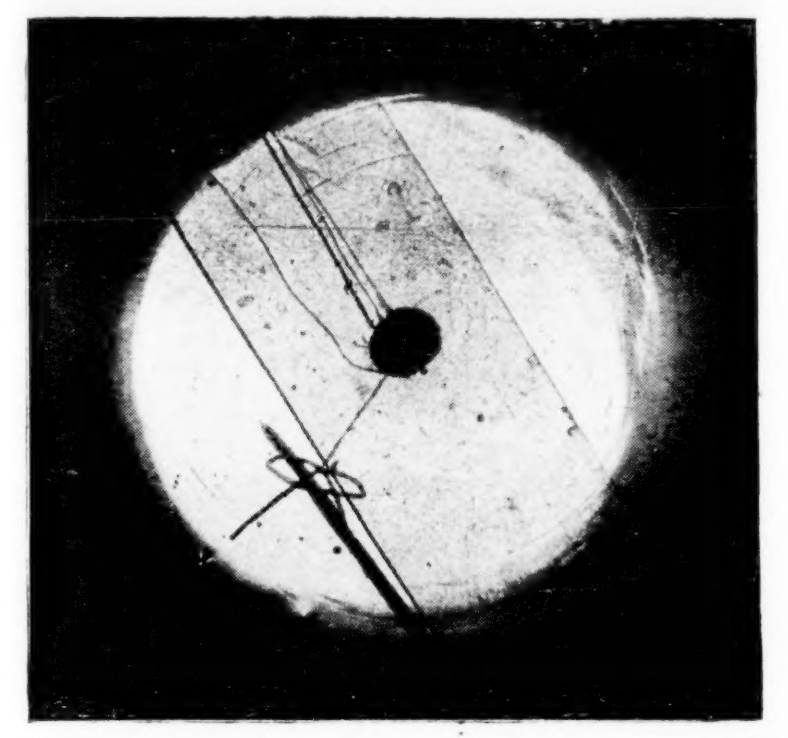


Abb. 2.

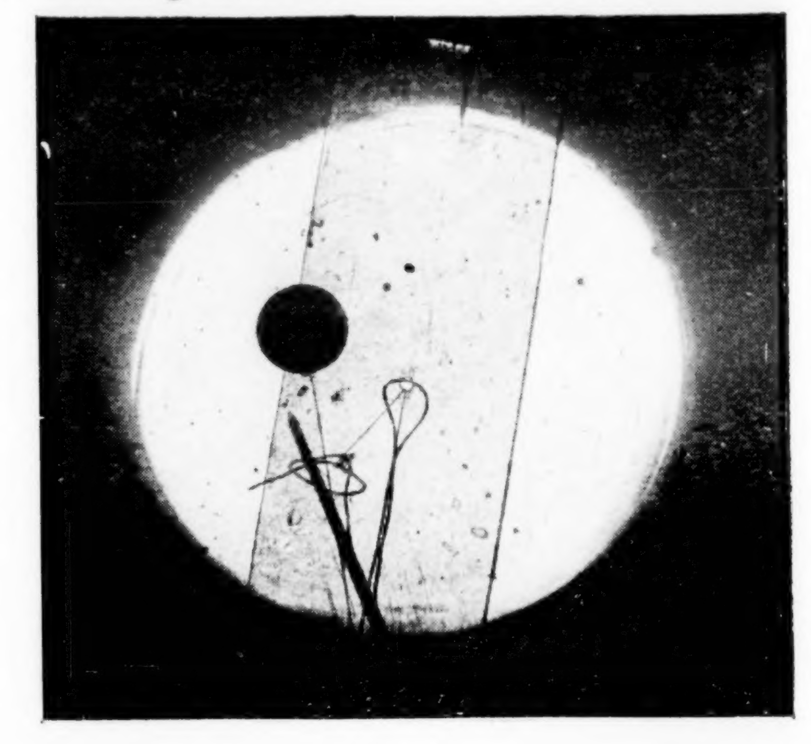


Abb. 3.

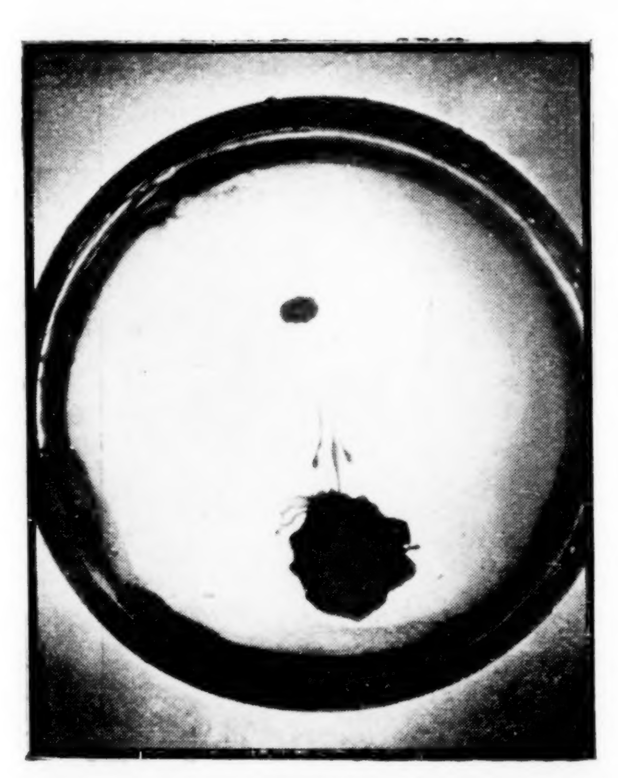


Abb. 4.

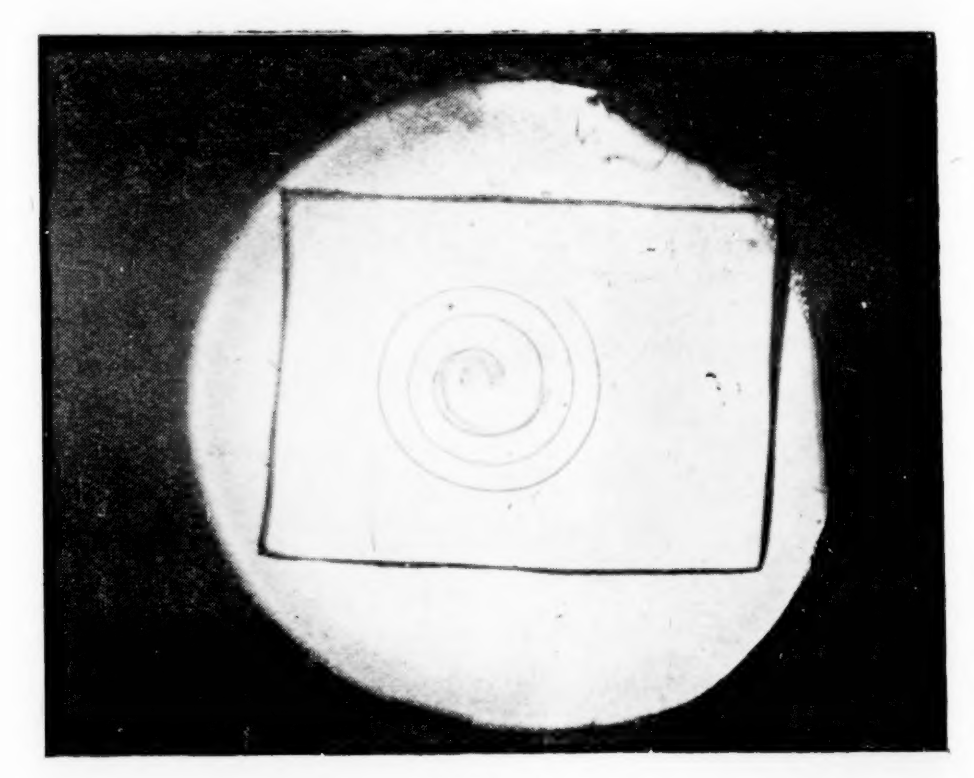


Abb. 6.

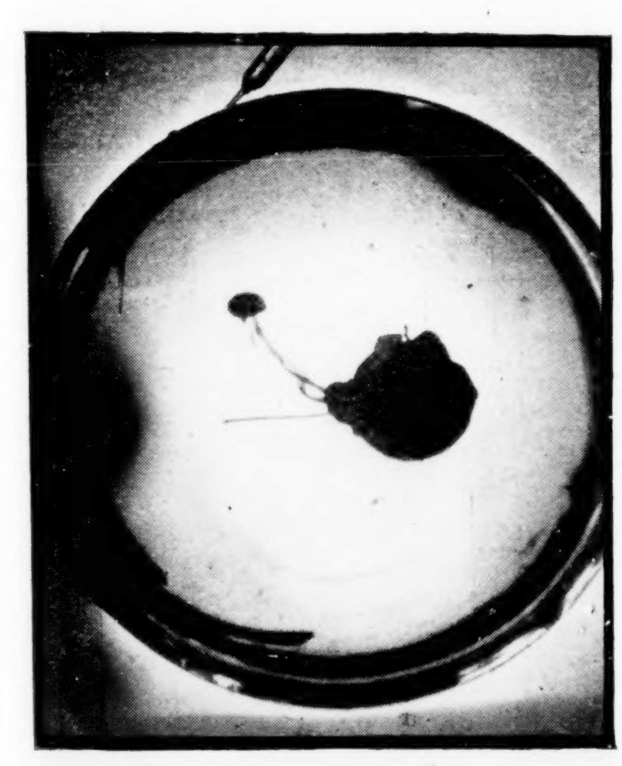


Abb. 5.

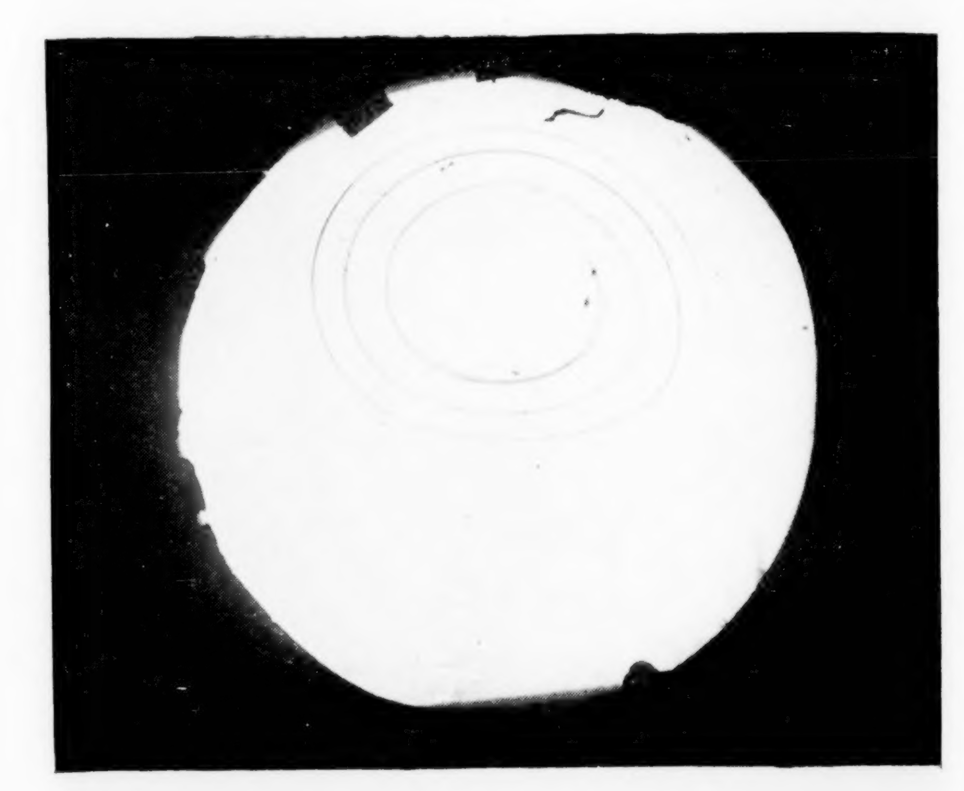


Abb. 7.

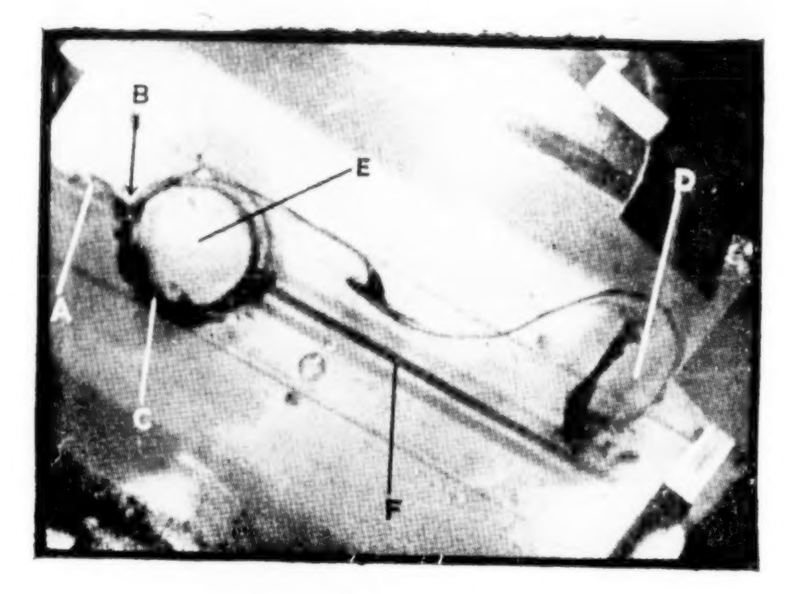


Abb. 9.

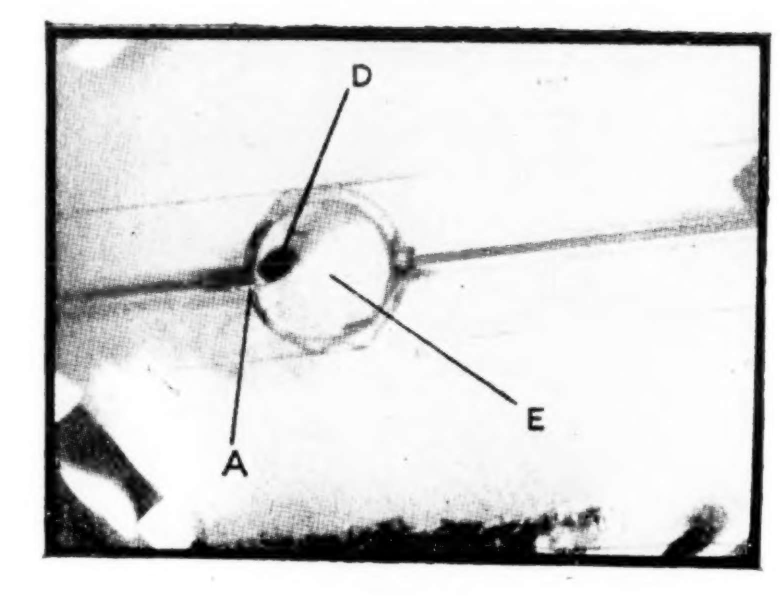


Abb. 10.

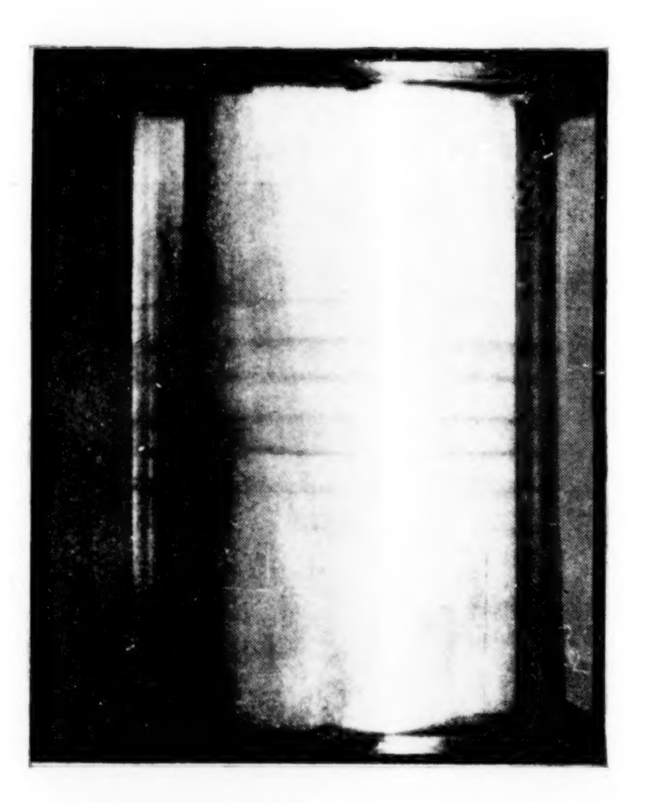


Abb. 12.

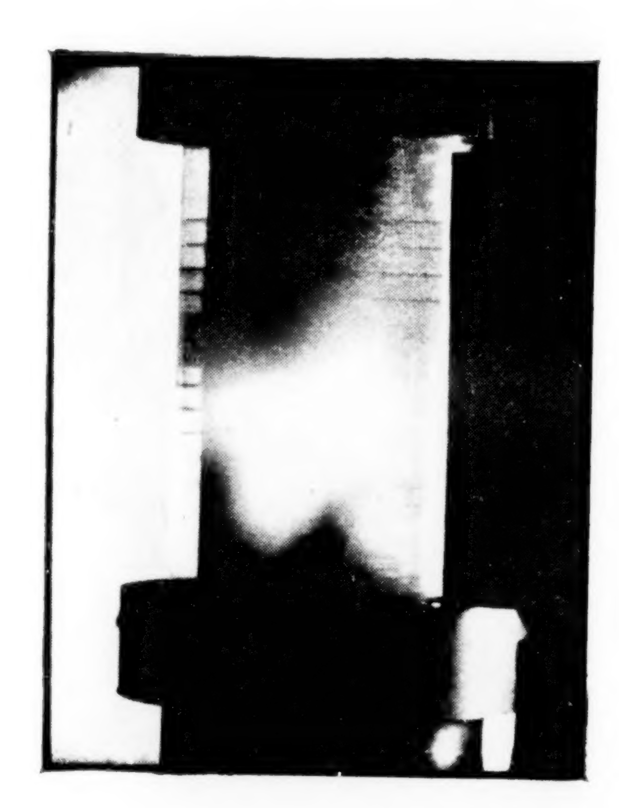


Abb. 13.



Abb 15.



Abb. 16.

einer Seite abgelenkt, so daß eine gekrümmte Bahn entsteht. Abb. 2 ist ein Lichtbild des Zylinders in der Mitte seiner Bahn, Abb. 3 ein Lichtbild der Kugel unter gleichen Umständen.

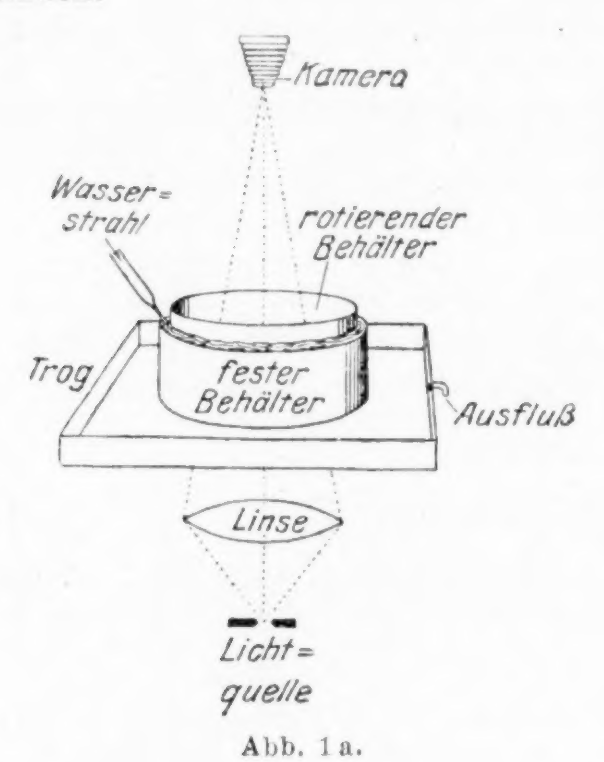


Abb. 1a.

Versuch 2. Die Verschiedenheit der Rückwirkungen der Flüssigkeit auf die festen Körper, die sich in den beiden Fällen des ersten Versuches durch sie hindurch bewegen, entspringt der Tatsache, daß die einzig mögliche Flüssigkeitsströmung, die bei gleichmäßiger Drehung des ganzen Systems ungeändert bleibt, eine zweidimensionale ist. — Teilchen, die ursprünglich auf einer Linie parallel der Rotationsachse liegen, bleiben bei der Bewegung in einer solchen Linie. — Alle anderen Strömungen werden durch Rotation verändert. Ein Wirbelring z. B. bewegt sich auf einer gekrümmten Bahn und nicht auf einer geraden. Abb. 4 zeigt einen Wirbelring von oben bei ruhender Flüssigkeit, Abb. 5 einen solchen in einer rotierenden Flüssigkeit.

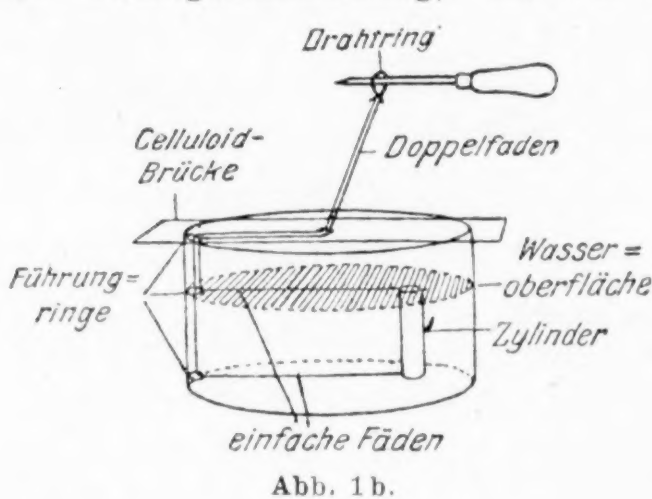


Abb. 1b.

Versuch 3. Jede Flüssigkeitsbewegung, die langsam ist gegenüber der Geschwindigkeit infolge der Drehung des Systems, ist notwendigerweise in ihrem allgemeinen Verlauf zweidimensional, kann aber kleine Schwankungen aufweisen, die sich diesem zweidimensionalen Bewegungszustand überlagern. Man bringt das Wasser in langsame Bewegung, indem man das Gefäß bewegt oder indem man das Wasser aufrührt und dann kurze Zeit unter dem Einfluß der Viskosität sich beruhigen läßt. Dann markiert man das Wasser, indem man etwas Tinte einspritzt. Wenn die Flüssigkeit nicht rotiert, werden die gefärbten Flüssigkeitsteilchen durch die Strömung in Schichten verteilt, die sich wieder und wieder kreuzen, bis die Farbe fast gleichmäßig verteilt ist. Wenn sich das System dreht, ist die Bewegung zweidimensional und daher kann das Farbmittel nur in Flächen verteilt werden, die überall parallel der Drehachse sind. Diese Schichten erscheinen in der Projektion als dünne Linien, die sich niemals schneiden können, so kompliziert auch das Muster aus Tintelinien von oben gesehen werden mag. Abb. 6 und 7 zeigen Lichtbilder dieser vertikalen Tinteschichten von oben.

Versuch 4. Selbst wenn ein dreidimensionaler Körper wie eine Kugel langsam in einer Flüssigkeit bewegt wird, ist die hervorgerufene Strömung zweidimensional, sobald nur die Grenzbedingungen die Möglichkeit einer solchen Bewegung zulassen. Bewegt sich eine Kugel langsam in irgendeiner Richtung in einer unendlich ausgedehnten rotierenden Flüssigkeit, so ist die einzig mögliche zweidimensionale Strömung die, in der ein zylindrisches Flüssigkeitsvolumen über- und unterhalb der Kugel mit ihr transportiert wird, als ob es starr mit ihr verbunden wäre. Außerhalb dieses Zylinders verhält sich die Flüssigkeit so, als ob sie durch einen festen Zylinder in Bewegung gesetzt würde und nicht durch einen die Kugel umschließenden Flüssigkeitszylinder.

Im Falle sich die Kugel (oder ein anderer fester Körper, von dem man annehmen sollte, daß er dreidimensionale Strömungen verursachte) in einer Ebene senkrecht zur Drehachse bewegt, ist die zweidimensionale oben beschriebene Bewegung auch noch möglich, wenn die Flüssigkeit nicht unbegrenzt ist, sondern durch Ebenen senkrecht zur Drehachse begrenzt. Der Versuch, in dem dies als richtig bewiesen wurde, ist nicht zum Projizieren geeignet. Abb. 8 zeigt den Apparat, in dem ein Körper von der Form eines

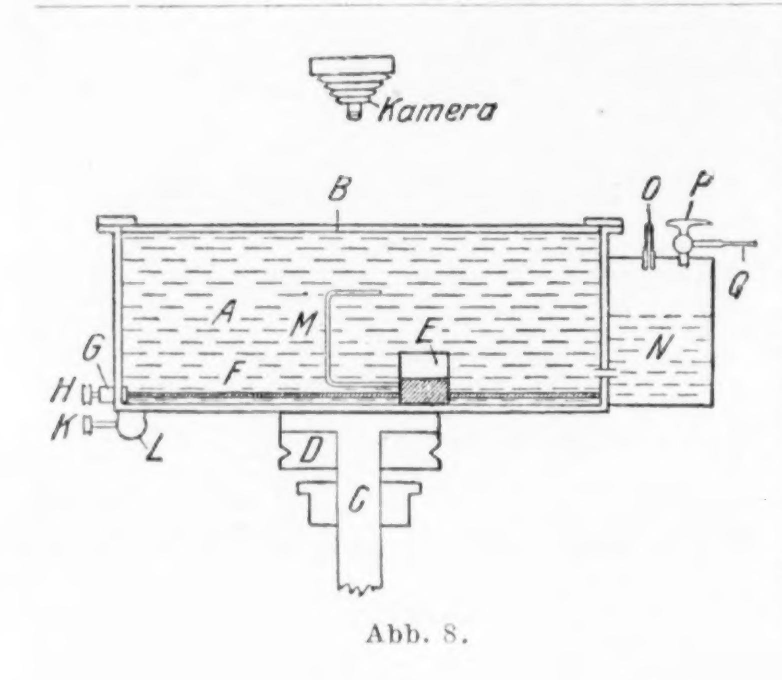


Abb. 8.

kurzen Zylinders von $^1/_3$ der Höhe des rotierenden Gefäßes, in dem er sich befindet, langsam durch Wasser bewegt wird. In halber Höhe zwischen der oberen Begrenzung des bewegten Körpers und der Unterseite des Glasdeckels des Gefäßes kann Tinte eingeführt werden. Wenn die Tinte an einen Punkt vor der Vorderseite des imaginären Zylinders eingeführt wird, der den bewegten Körper umgibt, so teilt sie sich bei Annäherung dieses imaginären Zylinders, so daß ein Teil der Tinte rechts, und ein Teil links vorbeifließt, während das Wasser über dem bewegten Körper klar bleibt. Dies ist in Abb. 9 dargestellt.

Abb. 10 zeigt den Fall, daß die Tinte an einem Punkt innerhalb des imaginären Zylinders eingeführt ist. Sie wird dann mit dem bewegten Körper mitgeführt, und zwar bleibt sie vertikal über ihm, als ob sie starr mit ihm verbunden wäre. Man kann sehen, daß nichts von der Tinte aus dem imaginären Zylinder entweicht.

Versuch 5. Wenn ein fester Drehkörper sich symmetrisch entlang der Drehachse einer rotierenden Flüssigkeit bewegt, werden die Teilchen der Achse entweder vor dem festen Körper hergetrieben, oder sie gleiten dicht an seiner Oberfläche entlang. Das erste tritt ein, wenn die Bewegung langsam ist; sonst tritt der zweite Fall ein. Bewegt der Körper sich nicht langsam, so muß jeder symmetrische Flüssigkeitsring, der gerade in Kontakt mit dem Körper steht, vorher einmal einen Ring mit unendlich kleinem Radius um die Drehachse gebildet haben. Da die Winkelgeschwindigkeit dieses Ringes vor der Annäherung des festen Körpers die des gesamten Systems war, und da der Ring seine Flächengeschwindigkeit behält, muß er, während er über den Körper gleitet, aufhören zu rotieren. Wenn nun die Flüssigkeit, die mit dem Körper in Berührung steht, nicht mit dem übrigen System rotiert, wird der feste Körper selbst auch aufhören, sich zu drehen, falls seine Drehung nicht durch ein äußeres Drehmoment aufrecht erhalten wird.

Bei dem Versuch kann sich ein leichter Zelluloidball vertikal entlang der Drehachse einer rotierenden Flüssigkeit bewegen. Es zeigt sich, daß er zu rotieren aufhört, sobald er aufzusteigen beginnt; aber wieder zu rotieren anfängt, sobald er sich nicht mehr vertikal bewegt.

Versuch 5a. Bewegt sich der Ball langsam entlang der Achse, so hört er nicht auf zu rotieren, sondern dreht sich nur langsamer. Auf der Achse oberhalb des Balles eingespritzte Tinte wird nach oben befördert, sobald der Ball beginnt sich zu bewegen. Dieser Versuch ist unvollkommen, weil das die Flüssigkeit enthaltende Gefäß nicht hoch genug ist.

Versuch 6. Die Stabilität einer zähen Flüssigkeit, die sich zwischen konachsialen rotierenden Zylindern befindet, gegen symmetrische Störungen ist mathematisch untersucht worden. Es hat sich gezeigt, daß bei gleichsinniger Rotation der Zylinder die Bewegung stabil ist bei allen Geschwindigkeiten, für die $\omega_1 r_1^2 < \omega_2 r_2^2$ ist, wo ω_1, r_1 Winkelgeschwindigkeit und Radius des inneren Zylinders bedeuten, und ω_2, r_2 sich auf den äußeren beziehen. Wenn $\omega_1/\omega_2 > r_2^2/r_1^2$ ist (das schließt alle Fälle der Rotation in entgegengesetzter Richtung ein), ist die Bewegung instabil, sobald die Drehgeschwindigkeit größer als ein bestimmter errechenbarer Wert ist. Es ist dies der erste Fall, in dem eine laminare Bewegung einer zähen Flüssigkeit sich als instabil erwiesen hat.

Wenn der innere Zylinder rotiert, während der äußere feststeht, zeigt sich die Instabilität in der Bildung von Wirbeln in den Meridianebenen. Abb. 11 zeigt die Stromlinien in einer Meridianebene. Diese Wirbel rotieren in den Meridianebenen abwechselnd in entgegengesetzter Richtung und sind durch äquidistante Ebenen senkrecht zur Achse getrennt. Das Vorhandensein dieser Wirbel läßt sich experimentell nachweisen, indem man gefärbte Flüssigkeit als dünne Schicht über dem inneren Zylinder verteilt. Diesen Ueberzug stellt man her, während die Zylinder noch langsamer rotieren, als der kritischen

Geschwindigkeit entspricht, bei der Instabilität erwartet wird. Die Geschwindigkeit wird dann allmählich gesteigert, bis die vorausgesagten Wirbel plötzlich auftreten.

Diese Wirbel bewirken, daß der farbige Ueberzug sich zu äquidistanten Ringen zusammenzieht. Die Ringe breiten sich vom inneren Zylinder über die horizontalen Ebenen aus, die die aufeinanderfolgenden Wirbel trennen. Wenn die Farbschicht den äußeren Zylinder erreicht, teilt sie sich und breitet sich nach oben und nach unten aus, wobei sie in enger Berührung mit dem äußeren Zylinder bleibt. In der Mitte zwischen den nach außen fließenden horizontalen Farbschichten, wo diese auf- und absteigenden Schichten sich treffen, vereinigen sie sich und bilden horizontale Zwischenschichten, die in ihrem Aussehen von den nach außen fließenden nicht zu unterscheiden sind.

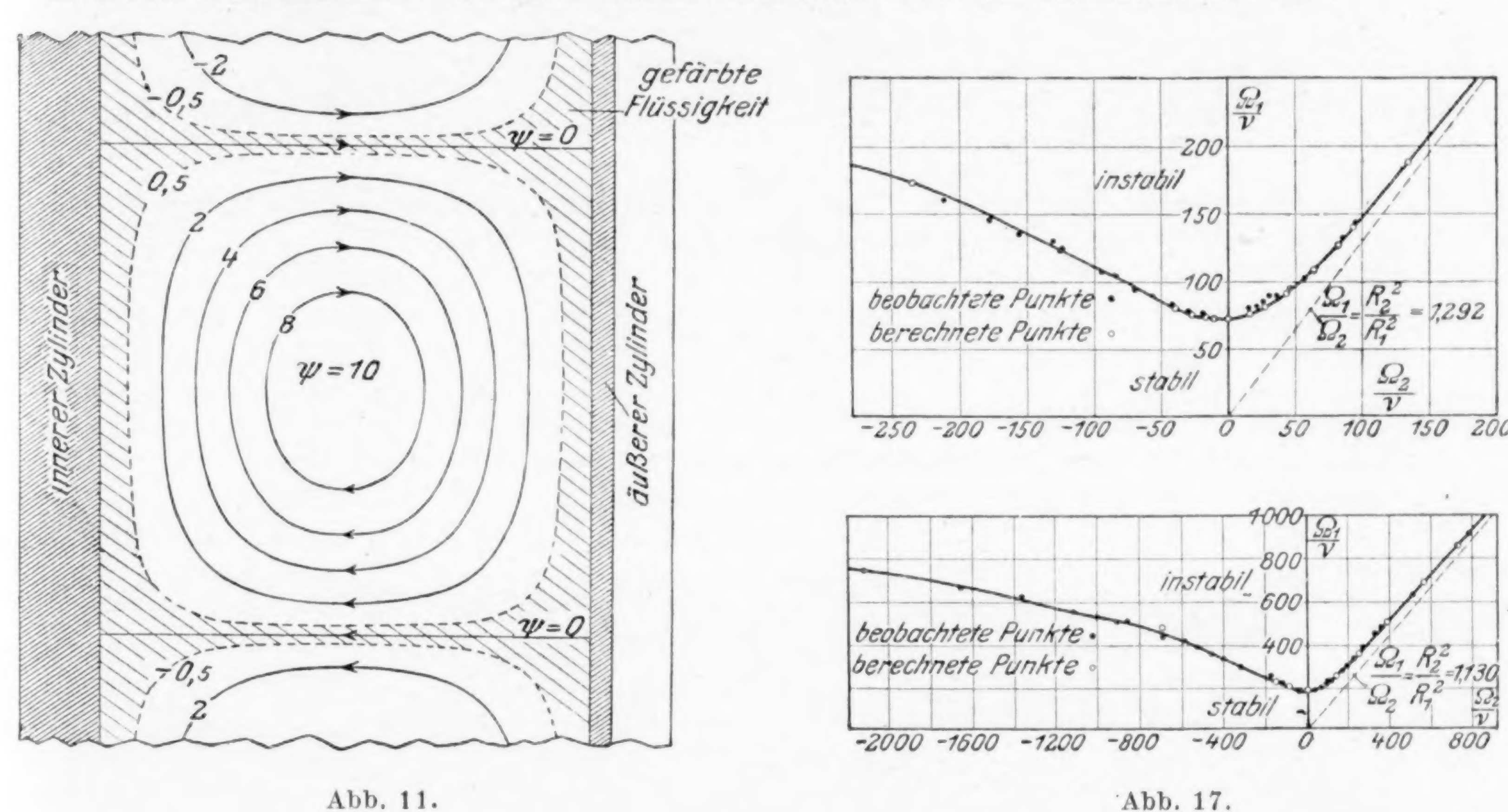


Abb. 11. Abb. 17.

Die Strömung wird auf die Projektionstafel durch Licht projiziert, das den Apparat horizontal durchsetzt. Die horizontalen Schichten müssen dann auf der Tafel als horizontale Linien gesehen werden. Die auf- und absteigenden Schichten, die nicht von der Seite gesehen werden, erscheinen nicht auf der Tafel. Abb. 12 und 13 zeigen den zu erwartenden Anblick.

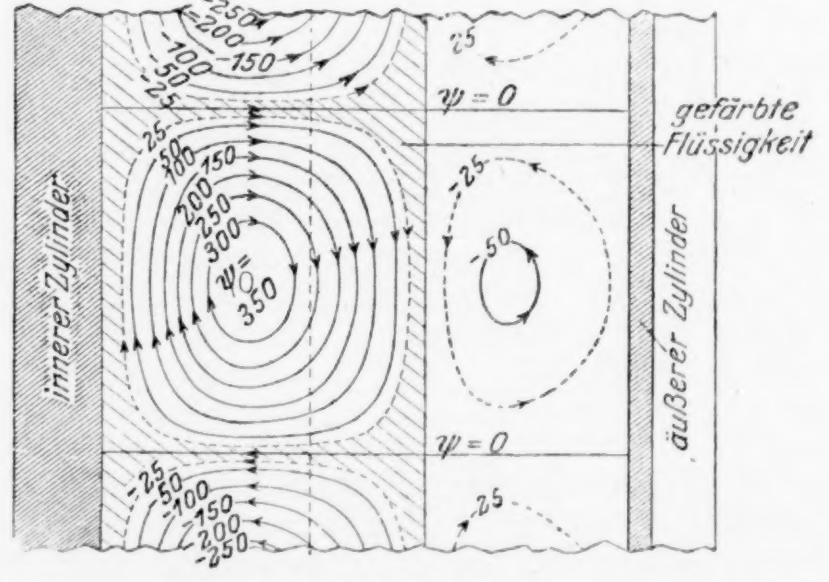


Abb. 14.

Wenn die Zylinder in entgegengesetzter Richtung rotieren, bewirkt die Instabilität ähnliche Effekte; aber es treten zwei Reihen von Wirbeln auf, die eine in Berührung mit dem inneren Zylinder, die andere in Berührung mit dem äußeren. Das Färbmittel zeigt bei unserer Art der Verteilung nur die innere Wirbelreihe, während das Wasser dort klar bleibt, wo nach der Theorie die äußeren Wirbel vorhanden sein müssen. Die Abb. 14, 15 und 16 zeigen den Versuch für den Fall, daß die Zylinder entgegengesetzt rotieren. Die Genauigkeit, mit der die Theorie die kritischen Geschwindigkeiten voraussagt, bei denen die Instabilität beginnt, ist ganz außerordentlich; der Fehler beträgt in den meisten Fällen weniger als 2 vH. Abb. 17 zeigt den Vergleich zwischen Theorie und Versuch. Diese Instabilität ist offenkundig nicht von derselben Art wie die Turbulenz, die bei Reynolds Versuchen über die Strömung in Rohren beobachtet ist.

Die Flächenschieber oder zweidimensionalen ebenen Rechenschieber.

Von **P. LUCKEY** in Marburg.

Die Ausführungen von Hrn. Kretschmer im vorigen Heft dieser Zeitschrift[1]) und seine Promotionsschrift[2]) geben mir Gelegenheit, über Rechentafeln mit beweglichen Systemen, die ich in meinem Bericht[3]) nur gestreift hatte, nähere Angaben zu machen. Die von Hrn. Kretschmer angegebene fruchtbare Methode wird sich dabei als Sonderfall in allgemeinere Verfahren einfügen. Nach Darbietung eines Beispiels für solche Verfahren[4]) will ich versuchen, deren Vorteile und Nachteile abzuwägen und zum Schluß für die behandelten Formeln aus dem Eisenbetonbau andere Lösungswege vorschlagen.

1. Allgemeine Form der Tafeln mit einem verschiebbaren Blatt. Ein bewegliches System ist entweder ein allgemeines Ablesegerät, das bei einer großen Anzahl von Rechentafeln Verwendung findet, oder es ist ein besonderes, für eine bestimmte Rechentafel eigens herzustellendes und nur für diese verwendbares Gebilde. Als Uebergangsform kommen Ablesegebilde vor, die jeweilig für eine kleinere Gruppe von Tafeln brauchbar sind. Zur ersten Hauptart gehört die einfache Ablesegerade der Fluchtentafeln, der Dreistrahl der Sechsecktafeln und das mit einer Parallelenschar oder einem Geradenkreuz versehene Ableseblatt, das für eine verbreitete Gruppe von Gleichungen mit vier Veränderlichen brauchbar ist. Solche allgemeinen Ablesegeräte hatte ich bei der Bemerkung im Auge, an die Hr. Kretschmer in seinen Ausführungen anknüpft. Wenn ich berichtete, daß andere, nicht geradlinige Ablesefiguren um so weniger Anklang gefunden haben, als sie sich nur speziellen Gleichungsformen anpaßten, auf die sich die in der Praxis zu vertafelnden Gleichungen nicht bringen ließen, so ging ich allerdings zu weit; denn ein System, das aus einem Kreis mit bestimmtem Halbmesser und einer Schar dazu konzentrischer Kreise besteht[5]), ist für Gleichungen brauchbar, die auch in den Anwendungen vorkommen, und wenn der feste Kreis zu einem Punkt zusammenschrumpft, liegen ja die Nomogramme von Gjerssewanoff vor. Aber große praktische Bedeutung haben solche allgemeinen Ableseblätter mit krummen Linien nicht gewonnen. Anders steht es dagegen mit der zweiten Hauptart, den speziellen, dem jeweiligen festen Grundblatt angepaßten beweglichen Systemen, die Hr. Kretschmer im Auge hat. Die Anwendung dieser Gebilde, zu denen ja auch die Zungen der Rechenschieber zu rechnen sind, hat hohe praktische Bedeutung. Ihnen gilt auch die »allgemeine morphologische Theorie«[6]).

Bezeichnen wir mit Π das feste »Grundblatt« und mit Π' das auf dem Grundblatt einzustellende »Wanderblatt«, so hat Π' im allgemeinen drei Freiheitsgrade. Legen wir auf Π ein rechtwinkliges Koordinatensystem (O, x, y) und auf Π' ein ebensolches Koordinatensystem (O', x', y') zugrunde, so können wir z. B. Π' in der Richtung OX und in der Richtung OY verschieben und ferner um den Punkt O' drehen. W. Margoulis[7]) hat zuerst den Fall näher untersucht, daß Π' nur die beiden Freiheitsgrade der Verschiebung hat, und auf die Tragweite und hohe praktische Bedeutung solcher Tafeln mit einem Schiebeblatt hingewiesen. Diese Nomogramme, denen diejenigen von Kretschmer als spezielle Fälle angehören, sind die natürliche Weiterbildung der Rechenschieber ins Zweidimensionale. Ich schlage deshalb für sie die kurze, mundgerechte Bezeichnung »Flächenschieber« vor.

---

[1]) Diese Zeitschr. 5 (1925), S. 182 bis 184. Hr. Kretschmer hatte mir das Manuskript seiner Zuschrift freundlichst zur Verfügung gestellt.

[2]) W. Kretschmer, Einige besondere nomographische Verfahren und ihre Anwendung auf technische Formeln, ungedruckte Dr.-Ing.-Dissertation, Berlin 1924.

[3]) Diese Zeitschr. 4 (1924), S. 61 bis 80.

[4]) Weitere Beispiele wird ein Aufsatz über Nomogramme für die Oberfläche des Quaders in dieser Zeitschrift bringen.

[5]) Vergl. Soreau, Nomographie II, S. 169 bis 171.

[6]) Diese Zeitschr. 3 (1923), S. 46 bis 59.

[7]) W. Margoulis, Les abaques à transparent orienté. Compt. rend. 1922, I, S. 1684 bis 1686.

Das feste **Grundblatt** Π (Abb. 1) trage die Netze

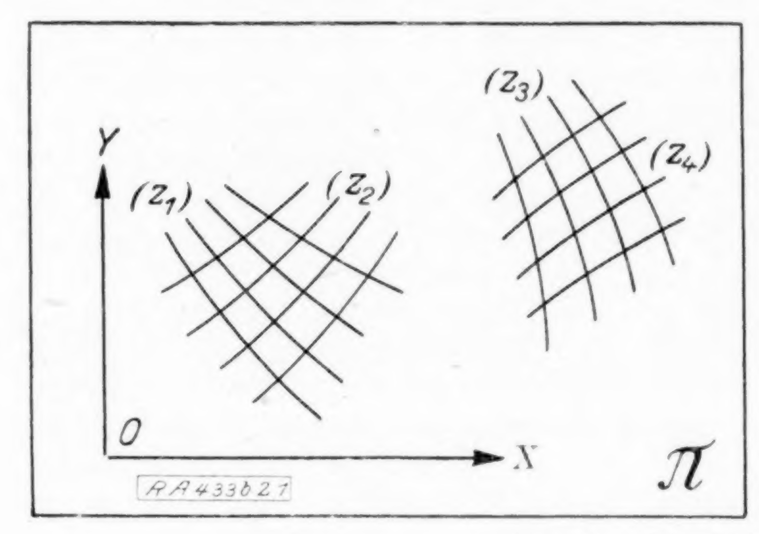
$(z_1, z_2) \ldots\ldots x = f_{12},\ y = g_{12}$ . . (1), $(z_3, z_4) \ldots\ldots x = f_{34},\ y = g_{34}$ . . (2),

und das **Schiebeblatt** Π', das etwa aus durchsichtigem Papier bestehe, trage das Netz

$$(z_5, z_6) \ldots\ldots x' = f_{56},\ y' = g_{56} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und die Kurvenschar

$$(z_7) \ldots\ldots F(x', y', z_7) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$



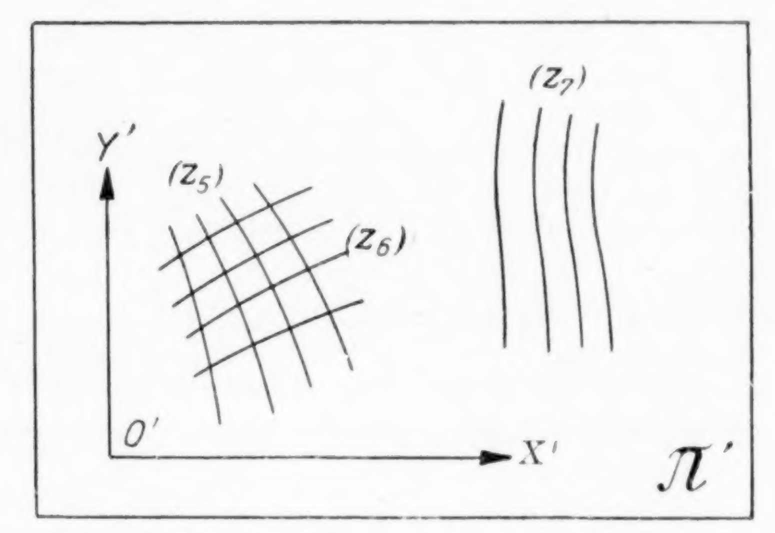


Abb. 1. Grundblatt und Schiebeblatt.

Man stelle nun Π' so auf Π ein, daß der Punkt (z_5, z_6) von Π' auf den Punkt (z_1, z_2) von Π fällt und daß die Gerade $O'X'$ von Π' parallel der Geraden OX von Π ist. Dann fällt der Punkt (z_3, z_4) von Π auf eine Kurve (z_7) von Π'. In der Schreibweise der morphologischen Theorie drücken sich diese »Berührungen« folgendermaßen aus[1]:

$$(z_5, z_6) \mapsto (z_1, z_2), \qquad x'_\infty \mapsto OX, \qquad (z_7) \mapsto (z_3, z_4).$$

(Die zweite dieser Beziehungen sagt aus, daß der unendlich ferne Punkt von $O'X'$ auf die Achse OX fällt.)

Bei dieser Art von Einstellung ist die Abszissendifferenz der Punkte (z_1, z_2) und (z_3, z_4) gleich der Abszissendifferenz zwischen dem Punkte (z_5, z_6) und demjenigen Punkte der Kurve (z_7), der bei der Einstellung auf (z_3, z_4) fällt. Bezeichnen wir die Koordinaten des genannten Punktes mit x', y', so ist also

$$f_{34} - f_{12} = x' - f_{56}$$

oder

$$x' = f_{34} + f_{56} - f_{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Ebenso ergibt sich für die Ordinaten:

$$y' = g_{34} + g_{56} - g_{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Setzt man die Werte (5) und (6) in (4) ein, so erhält man

$$F(f_{34} + f_{56} - f_{12},\ g_{34} + g_{56} - g_{12},\ z_7) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Diese Gleichung mit sieben Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_7$ **gibt die allgemeine Form der Gleichungen an, die durch Tafeln mit einem verschiebbaren Deckblatt von der gekennzeichneten Art darstellbar sind.** Sehr viele Gleichungen der Technik lassen sich auf diese sehr allgemeine Form bringen.

Natürlich kann man auch Π' als Grundblatt und Π als Schiebeblatt verwenden. Eine noch allgemeinere Form erhält man, wenn man auf Π drei Netze (z_1, z_2), (z_3, z_4), (z_5, z_6) und auf Π' dementsprechend drei Kurvenscharen (z_7), (z_8), (z_9) annimmt. Die Einstellung, bei der wir jetzt lieber Π als das bewegliche Blatt ansehen wollen, hat so zu erfolgen, daß wieder die Koordinatenachsen gleichlaufend werden und daß der Punkt (z_1, z_2) auf die Kurve (z_7) und der Punkt (z_3, z_4) auf die Kurve (z_8) fällt. Dann fällt der Punkt (z_5, z_6) auf eine Kurve (z_9). Für diesen allgemeineren Fall läßt sich die der Gleichung (7) entsprechende Gleichung mit neun Veränderlichen nicht geschlossen niederschreiben.

Wir haben jedem Punkt nur zwei Bezifferungen, jeder Linie nur eine Bezifferung zukommen lassen. Vermehrt man die Zahl der Bezifferungen, wendet also »verzweigte

[1] M. d'Ocagne, Sur les nomogrammes à transparent orienté. Compt. rend. 1922, I, S. 1664 bis 1669.

Systeme« an, so kann man Gleichungen mit noch mehr Veränderlichen darstellen. Weitere Möglichkeiten ergeben sich dadurch, daß man für Einstellung und Ablesung statt der »punktuellen Berührungen«[1]) (ein Punkt fällt auf eine Linie) auch »tangentielle Berührungen« (Berührungen zweier Linien) zuläßt, ferner dadurch, daß man durch Einführung von Hilfsveränderlichen eine vorgelegte Gleichung in mehrere andere Gleichungen zerlegt. Auch solche Fälle hat Margoulis[2]) behandelt, ebenso wie den allgemeinsten Fall, in welchem zur Verschiebung noch die Drehung des »Deckblatts« kommt[3]).

2. Anwendungen der Tafeln mit einem Schiebeblatt. Die bekannten Sechsecktafeln sind ein Sonderfall der Tafeln mit Schiebeblatt; auch die gewöhnlichen Fluchtentafeln lassen sich als spezielle Fälle dieser Tafeln betrachten. Aber die Tragweite dieser Methode ist weit größer, da sie die bisher schon lösbaren Gleichungen auch auf neue Arten löst und ferner Gleichungen erfaßt, für welche die bisherigen Verfahren versagten oder Umständlichkeiten — wie überzählige oder verzweigte Systeme — benötigten. Margoulis gibt an, daß er die von Mehmke behandelte Gleichung

$$a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s + 1 = 0$$

ohne Hilfsveränderliche darstellen kann, daß er ferner seit 1914 — besonders zur Lösung verschiedener Aufgaben aus der Flugtechnik — eine Reihe von Tafeln mit Schiebeblatt entworfen hat, darunter eine Tafel für ein System von acht Gleichungen mit insgesamt 13 Veränderlichen. Die »tangentiellen Berührungen« haben sich für die Aufsuchung gewisser Höchst- und Niedrigstwerte brauchbar erwiesen. Man kann mit Interesse der von dem genannten Autor geplanten ausführlicheren Veröffentlichung über diese Methoden entgegensehen, deren großer Wert darin besteht, daß sie Gleichungen mit einer größeren Zahl von Veränderlichen, die in den Anwendungen häufig vorkommen, ohne Einführung überzähliger und verzweigter Systeme darstellbar machen.

Sonderfälle der Rechentafeln mit Schiebeblatt sind schon länger bekannt. Zu ihnen gehören außer den Rechenschiebern, bei denen nur in einer Richtung geschoben wird, die Tafeln, bei denen eine geradlinige Leiter in vorgeschriebener Richtung auf ein Grundblatt einzustellen ist, wie das alte, »trigonometrische Netz« für den sphärischen Sinus- und Cosinussatz von Eble[4]) und die Tafel für die Zinseszinsformel von Hanck[5]) der wie Kretschmer mit fertigem logarithmischem Papier arbeitet. Wirkliche verschiebbare ebene Blätter hatten die graphisch-mechanischen Apparate von Reuschle[6]), ferner vor allem die Tafeln von Mehmke[6]), dessen Arbeiten zahlreiche Anwendungen auf algebraische Gleichungen bringen und die Keime der Vorschläge von Kretschmer und Margoulis enthalten. Zu nennen ist auch Batailler[7]). Ferner sei auf die beweglichen Transparente der Tafeln der sphärischen Astronomie[8]) hingewiesen[9]).

---

[1]) »Punktuelle Berührung« ist dasselbe, was man auch als Koinzidenz oder Ineinanderliegen bezeichnet.

[2]) W. Margoulis, Sur la théorie générale de la représentation des équations au moyen d'éléments mobiles. Compt. rend. 1923, I, S. 824 bis 826.

[3]) Die von mir angegebenen Stechzirkelnomogramme fügen sich hier als Sonderfall ein. Man kann in Abb. 2 meines Aufsatzes über nomographische Darstellungsmöglichkeiten (diese Zeitschr. 3 [1923], S. 49) die eine Teilfigur als das Grundblatt, die andere als das Wanderblatt betrachten, wie ich es an jener Stelle schon andeutete. Die Tafelart ist gekennzeichnet durch die beiden Doppelberührungen:

$$(z_1, z_2) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (z_5, z_6), \qquad (z_3, z_4) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (z_7, z_8).$$

[4]) M. Eble, Neues Zeitbestimmungswerk, patentiert 1852. Vergl. M. Eble, Graphische Trigonometrie, Ellwangen 1877, und W. Laska, Lehrbuch der Astronomie I, Bremerhaven und Leipzig 1906, S. 9.

[5]) P. Hanck, Ein Nomogramm für die Zinseszinsformel, Zeitschr. f. math. u. nat. Unterr. 52 (1921), S. 261 bis 263.

[6]) Vergl. Enc. d. math. Wiss. I, 2, Mehmke, Numerisches Rechnen.

[7]) Vergl. d'Ocagne, Calcul graphique et Nomographie, 1. Aufl. Paris 1908. S. 360.

[8]) Beispiele findet man in den Jahrgängen der Ann. d. Hydrographie u. maritimen Meteorologie.

[9]) Ein älteres Beispiel für Verwendung eines verschiebbaren Blattes ist auch J. Sumec, Graphische Bestimmung der Zugbeanspruchung von Freileitungen, ETZ, 1. Juli 1915. — Auch der Rechenschieber für komplexe Zahlen von Jean Spielrein (ETZ 1924, S. 849 bis 852) fällt unter die zweidimensionalen Schieber. Die mühsamen Entwicklungen des Verfassers lassen sich durch folgende Betrachtung ersetzen: Der Schieber beruht auf der durch die Funktion komplexen Arguments $\log(x + yi)$ vermittelten konformen Abbildung eines Kartesischen Netzes $x = a$, $y = b$. Da $\log(\varrho e^{i\varphi}) = \log \varrho + i\varphi$

Zu der Grundform der Blätter mit einer Schiebekurve von Kretschmer gelangt man durch folgende Spezialisierung: die Netze (z_1, z_2) und (z_3, z_4) auf Π (Abb. 1) bilden ein und dasselbe gewöhnliche logarithmische Netz und ebenso ist das Netz (z_5, z_6) auf Π' ein gewöhnliches logarithmisches Netz; ferner ist z_7 eine Konstante, so daß statt der Kurvenschar (z_7) auf Π' eine einzige Kurve auftritt. In den Gleichungen (1), (2), (3) ist also:

$$\begin{cases} f_{12} = \log z_1 \\ g_{12} = \log z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} f_{34} = \log z_3 \\ g_{34} = \log z_4 \end{cases} \quad \begin{cases} f_{56} = \log z_5 \\ g_{56} = \log z_6 \end{cases}$$

und an die Stelle der Gl. (4) tritt

$$F(x', y') = 0.$$

Die allgemeine Gleichung für Tafeln mit einem Schiebeblatt (7) geht also über in

$$F(\log z_3 + \log z_5 - \log z_1, \quad \log z_4 + \log z_6 - \log z_2) = 0$$

oder [1])

$$\Phi\left(\frac{z_3 z_5}{z_1}, \quad \frac{z_4 z_6}{z_2}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (8).$$

In vielen Fällen wählt Kretschmer als eines der Netze in Abb. 1 statt des logarithmischen Netzes eine schräge logarithmische Leiter, die sich ohne weiteres in das logarithmische Netz einzeichnen läßt, oder ein Netz, das entsteht, wenn man eine Schar schräger Geraden in ein logarithmisches Netz einzeichnet. Wählt man z. B. für das Netz (z_1, z_2)

$$\begin{cases} f_{12} = \log z_1 + a \log z_2 \\ g_{12} = \log z_2 \end{cases}$$

wo a eine Konstante ist, so tritt an die Stelle von (8) die Gleichung

$$\Phi\left(\frac{z_3 z_5}{z_1 z_2{}^a}, \quad \frac{z_4 z_6}{z_2}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (9).$$

Im einzelnen ist z. B. für Kretschmers Abb. 2 (S. 182):

$$\begin{cases} f_{12} = \log C + \log d \\ g_{12} = \log d \end{cases} \quad \begin{cases} f_{34} = \log e \\ g_{34} = \log p \end{cases} \quad \begin{cases} f_{56} = 0 \\ g_{56} = 0 \end{cases}$$

Setzt man diese Funktionen und $z_7 = 0$ in die Gleichung (7) ein, so erhält man

$$F(\log e - \log C - \log d, \quad \log p - \log d) = 0$$

oder

$$F\left(\log \frac{e}{C \cdot d}, \quad \log \frac{p}{d}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{e}{C \cdot d} = f\left(\frac{p}{d}\right).$$

Für die Abb. 3 (S. 183) erhält man:

$$\begin{cases} f_{12} = \log C + {}^1/_3 \log M_b \\ g_{12} = \log M_b \end{cases} \quad \begin{cases} f_{34} = \log d \\ g_{34} = \log M_d \end{cases} \quad \begin{cases} f_{56} = {}^1/_3 \log k_b \\ g_{56} = \log a \end{cases}$$

Dies führt auf

$$F\left(\log \frac{d\sqrt[3]{k_b}}{C\sqrt[3]{M_b}}, \quad \log \frac{a\, M_d}{M_b}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\sqrt[3]{k_b}}{C \cdot \sqrt[3]{M_b}} = f\left(\frac{a\, M_d}{M_b}\right).$$

3. Flächenschieber für die Blechdicke von Flammrohren. In Abb. 2 gebe ich die nomographische Lösung einer Formel, die von der Form der Gl. (7) ist, aber nicht mehr zu der von Hrn. Kretschmer behandelten enger begrenzten Klasse gehört. Es ist die in den reichsgesetzlichen Bestimmungen über Anlegung und Betrieb von Dampfkesseln enthaltene Formel für die Berechnung der Blechdicken von Dampfkesselflammrohren mit äußerem Ueberdruck [2])

$$s = \frac{p\, d}{2400}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a\, l}{p\,(l + d)}}\right) + 2 \quad \dots\dots\dots \quad (10).$$

---

ist, so sind Multiplikationen und Divisionen komplexer Zahlen in der Bildebene als Verschiebungen bei parallel bleibenden Koordinatenrichtungen ausführbar. — J Hak verwendet in seiner Arbeit: »Eine graphische Methode zur Lösung von Erwärmungsaufgaben« (ETZ 1924, S. 235 bis 238) wie Kretschmer ein Grundblatt mit logarithmischen Koordinaten und ein ebensolches Deckblatt. Er zeichnet die Ablesekurve auf dem Grundblatt.

[1]) Für den Fall $z_5 = z_6 = 1$ hat schon Mehmke diese Gleichung nach dem Schiebekurvenverfahren gelöst. Vergl. Mehmke, Leitf. z. graph. Rechnen, Leipzig und Berlin 1917, S. 69. Mehmke weist an dieser Stelle zurück auf O. Reynolds, Phil. Trans. vol. 170 (1879), part II, S. 753.

[2]) Vergl. Hütte, 24. Aufl., II, S. 93.

Hier bedeutet s die Blechdicke, d den inneren Durchmesser, l die Länge des zylindrischen Flammrohrs, alles in mm; p ist der größte Betriebsüberdruck in at und a ist ein Beiwert, der folgende vier Werte annimmt:

$a = 100$ für liegende Rohre mit überlappter Längsnaht,
$a = 80$ » » » » gelaschter oder geschweißter Längsnaht,
$a = 70$ für stehende Rohre mit überlappter Längsnaht,
$a = 50$ » » » » gelaschter oder geschweißter Längsnaht.

Bezeichnet man mit $\bar{x}, \bar{y}$ die Bezifferung eines Punktes in einem rechtwinkligen logarithmischen Koordinatennetz, so trägt das Grundblatt der Rechentafel das Netz (d, l) mit den Gleichungen

$$\bar{x}_{d,l} = \frac{d}{1000}, \qquad \bar{y}_{d,l} = 1 + d/l \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und das Netz (s, a) mit den Gleichungen

$$\bar{x}_s = s - 2, \qquad \bar{y}_a = a/20 \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Das Schiebeblatt trägt die Leiter

$$\bar{x}_p = \frac{2{,}4}{p}, \qquad \bar{y}_p = \frac{20}{p} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

und die Ablesekurve

$$\bar{y} + 1 = (\bar{x} - 1)^2 \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Die Einstellung des Schiebeblatts auf das Grundblatt drückt sich aus durch die Gleichungen

$$\frac{\bar{x}_s}{\bar{x}_{d,l}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_p}, \qquad \frac{\bar{y}_a}{\bar{y}_{d,l}} = \frac{\bar{y}}{\bar{y}_p} \quad \ldots \ldots \quad (15),$$

die völlig der bekannten, beim gewöhnlichen eindimensionalen logarithmischen Schieber bestehenden Proportion

$$\bar{x}_2 : \bar{x}_1 = \bar{x}_4 : \bar{x}_3$$

entsprechen, wenn $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ die Bezifferungen zweier Leiterpunkte des Schiebers und $\bar{x}_3, \bar{x}_4$ die Bezifferungen der ihnen gegenüber stehenden Leiterpunkte der Zunge sind. Daß sowohl die Zähler wie die Nenner in jeder der Gleichungen (15) mit einem beliebigen Faktor vervielfältigt werden können, wird dazu ausgenutzt, den Systemen des Grund- und des Schiebeblatts günstige gegenseitige Stellungen zu geben. In den Gleichungen (11) bis (14) sind diese Faktoren schon passend gewählt.

Die Elimination aller $\bar{x}$ und $\bar{y}$ aus den 9 Gleichungen (11) bis (15) liefert die Gleichung (10).

Bei Benutzung von logarithmischem Papier machen nur die l-Kurven des Netzes (11) etwas mehr Arbeit, da sie wie die schnell herstellbare Ablesekurve (14) punktweise zu berechnen sind. Doch gehen sie durch viele mit ganzen Zahlen bezifferte Punkte; auch ergeben sich bei der Berechnung allerhand Rechenvorteile und Kontrollen. Die Leiter (p) erhält man, wenn man die Hauptdiagonale zweier in dieser Hauptdiagonale benachbarter Mantissenquadrate eines Blattes des logarithmischen Papiers zieht und die hierbei entstehende Leiter so auf das Schiebeblatt mit der Nadel durchsticht, daß der mit $p = 20$ bezifferte Punkt auf den logarithmischen Netzpunkt $\bar{x} = 1{,}2$, $\bar{y} = 10$ und der mit $p = 2$ bezifferte Leiterpunkt auf den Punkt $\bar{x} = 0{,}12$, $\bar{y} = 1$ fällt. Dies geht aus den Gleichungen (13) hervor.

Anwendungsbeispiel: Ist gegeben $d = 800$ mm, $l = 1200$ mm, $p = 6$ at, $a = 80$, so stellt man den Punkt $p = 6$ des Schiebeblatts auf den Netzpunkt $(d = 800,\ l = 1200)$ des Grundblatts. Wenn man hierbei dafür sorgt, daß die wagerechten Leitlinien des Schiebeblatts denen des Grundblatts parallel sind, so geht durch den Punkt, in welchem die Ablesekurve des Schiebeblatts die Linie $a = 80$ schneidet, die mit 10 bezifferte s-Linie. Die Blechdicke beträgt also 10 mm. Die Stellung des Schiebeblatts für dieses Beispiel ist gestrichelt angedeutet.

4. Methodische und technische Bemerkungen. Die Frage der leichten Herstellbarkeit von Rechentafeln muß recht brennend sein, denn wiederholt hat man neuerdings in Deutschland um den Preis der leichten Herstellbarkeit dauernde Nachteile

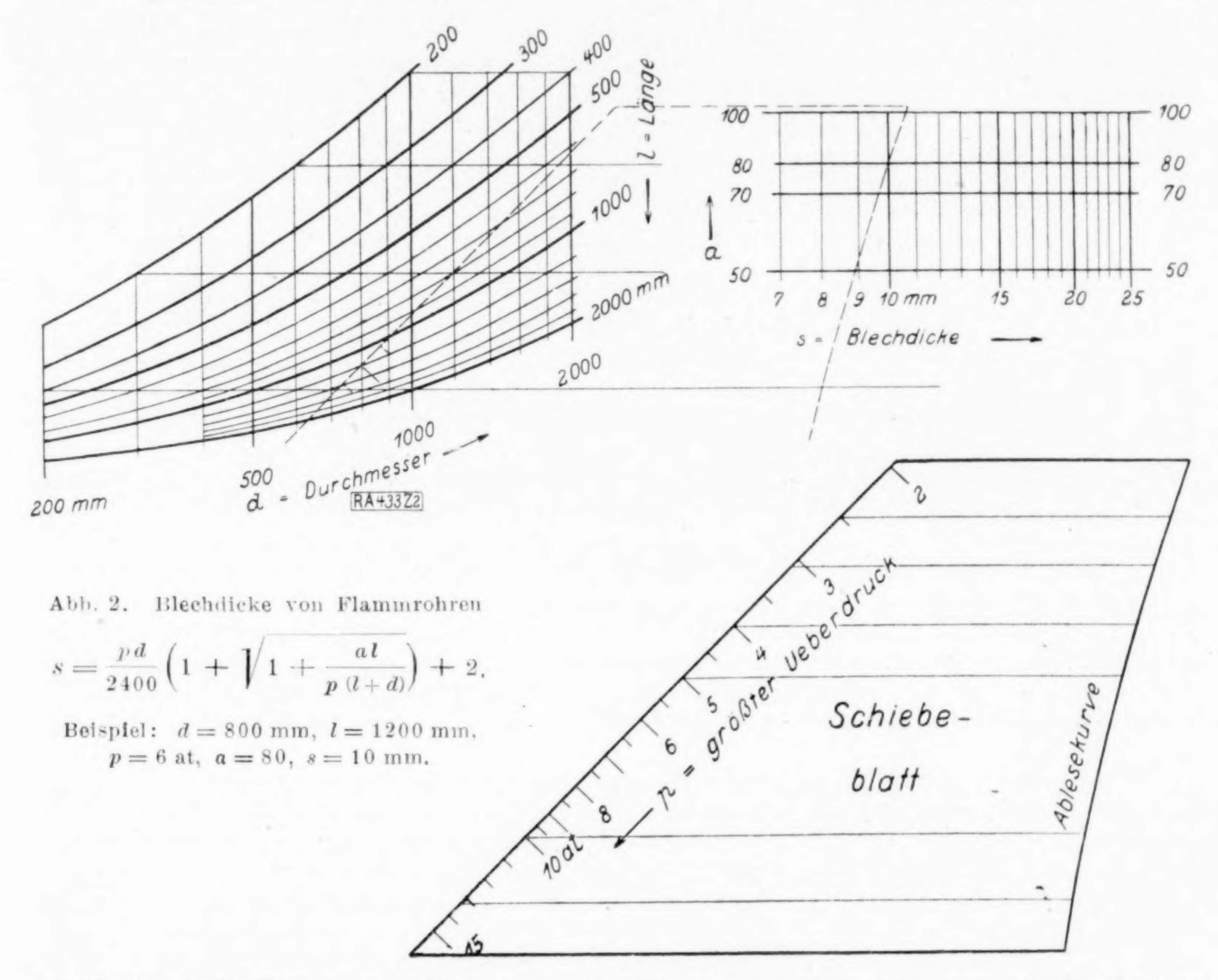


Abb. 2. Blechdicke von Flammrohren

$$s = \frac{p\,d}{2400}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a\,l}{p\,(l+d)}}\right) + 2.$$

Beispiel: $d = 800$ mm, $l = 1200$ mm,
$p = 6$ at, $a = 80$, $s = 10$ mm.

und Umständlichkeiten in der Benutzung in Kauf genommen. Um krummlinige Leitern zu vermeiden, findet sich J. Hak[1]) damit ab, daß jede Ablesung um eine Operation vermehrt wird, nämlich um einen Wertesprung auf einer der Leitern oder um einen Uebergang von einer Leiter auf eine andere längs einer Leitkurvenschar. Um den Preis der bequemen Einzeichnung in logarithmisches Papier opfert **Kretschmer** mit dem an anderer Stelle[2]) gemachten Vorschlag seiner »schrägen Zapfenlinie« die eigentümlichen Vorzüge der Fluchtentafeln aus drei Leitern, nämlich die klare, gleichzeitige Ueberschaubarkeit und einfache Variierbarkeit dreier zusammengehöriger Werte der Veränderlichen. Zeitdauer, Sicherheit und Genauigkeit der Ablesung werden beeinträchtigt durch diese Brechung des Ableseweges, der nun wieder den unbeliebten Linienscharen entlang laufen soll.[3]) Wenn eine dauernde Benutzung der Tafel in Frage kommt, dürfte es wohl wirtschaftlicher sein, die Zeichnung der logarithmischen Leitern, etwa mit Hilfe der käuflichen, sehr genauen logarithmischen Facettenmaßstäbe nicht zu scheuen; für einen ersten Entwurf oder eine behelfsmäßige Herstellung aber liefert ein schräger Schnitt durch logarithmisches Papier eine logarithmische Leiter von jedem gewünschten Maßstabe zum Aufkleben.

[1]) J. Hak, diese Zeitschr. 1 (1921), S. 154 bis 157; 2 (1922), S. 469 bis 472; Annales des Ponts et Chaussées 1923, S. 375 bis 386. Die an der Spitze der zweiten dieser Arbeiten gemachten falschen Angaben über die allgemeine, durch eine Fluchtentafel mit drei geraden Leitern darstellbare Gleichung sind in der dritten, französisch geschriebenen Arbeit berichtigt.

[2]) Werft, Reederei, Hafen, 4 (1923), S. 31 bis 35.

[3]) Anders steht es natürlich mit der Brauchbarkeit der Tafel für mehr als drei Veränderliche, die Kretschmer in seiner Dissertation unter dem Namen »Verbundnomogramm« behandelt. Für vier Veränderliche ist dies eine für die Gleichung $A z_1^{a_1} z_2^{a_2} z_3^{a_3} z_4^{a_4} = 1$ entworfene Tafel, die aus einer Verkoppelung einer logarithmischen Fluchtentafel mit einer logarithmischen Netztafel besteht, oder — was dasselbe ist — aus einer Fluchtentafel mit einer verdichteten Leiter. Eine neue Methode ist diese Form nicht. Bekanntlich kann man hier über drei Maßstäbe verfügen. Um das logarithmische Papier zu benutzen, macht Kretschmer diese Maßstäbe gleich. In manchen Fällen wird dies aber zu einer ungünstigen Form der Tafel führen.

Auf die leichte Herstellbarkeit legt Hr. Kretschmer auch bei seinen Schiebekurvenblättern den größten Nachdruck, während Margoulis nur die Darstellbarkeit schwierigerer Gleichungen betont. Es verdient in der Tat alle Beachtung, daß hier gezeigt wird, wie für ziemlich verwickelte Gleichungen mit bis zu sechs Veränderlichen das fertige logarithmische Papier dienen kann und nur eine Kurve punktweise zu zeichnen ist. Zu den schon genannten Vorteilen der Tafeln mit Schiebeblättern — keine verzweigten Systeme und keine überzähligen Systeme, so daß jede Veränderliche als Unbekannte auftreten kann — kommt noch der Vorteil, daß eine logarithmische Leiter in allen Teilen dieselbe relative Genauigkeit hat.

Dennoch wird man in Fällen, wo auch andere Methoden möglich sind, besonders also bei Gleichungen mit einer geringeren Zahl von Veränderlichen (wie bei Abb. 2 S. 182) über die Nachteile dieser Rechentafeln mit beweglichen Systemen nicht hinwegsehen. Man hat wieder Linienscharen und Netze, die aus physiologischen und psychologischen Gründen den einfachen Leitern nachstehen. Die Beunruhigung des Auges beim Einstellen und Ablesen kann leichter Ungenauigkeiten und Fehler bewirken. Das Papier des beweglichen Blattes kann sich anders ziehen als das des Grundblattes, ein Nachteil, der sich allerdings bei Kretschmers Tafeln weniger geltend machen wird, als bei den Tafeln von Margoulis, der anscheinend mit einem durchsichtigen Blatt, also einer anderen Papiersorte arbeitet. Solche beweglichen Ableseblätter gehen auch leicht verloren; Büchern gibt der Verleger sie nicht gern bei, und das in mehreren Auflagen erschienene amerikanische Handbuch von Halsey[1]) hätte nicht mit so zahlreichen Nomogrammen ausgeschmückt werden können, wenn man mit beweglichen Systemen gearbeitet hätte. Hinsichtlich der Genauigkeit ziehe ich eine sorgfältig von Hand gezeichnete Leiter dem käuflichen Logarithmenpapier vor. Für Präzisionsarbeit wären punktweise berechnete Leitern mit dem Koordinatograph zu zeichnen.

Diese Bemerkungen sollen und können aber nicht der Bedeutung Abbruch tun, die den zweidimensionalen Rechenschiebern vor allem bei Gleichungen mit einer größeren Zahl von Veränderlichen zukommt. Bei der großen Vorliebe, deren sich das Fluchtlinienverfahren erfreut, hat man Gleichungen mit einer größeren Zahl von Veränderlichen meistens durch Ketten von aneinandergekoppelten Fluchtentafeln zu je drei Veränderlichen mehr oder weniger glücklich dargestellt. Solche zusammengesetzten Fluchtentafeln machen manchmal einen gequälten und zusammengeflickten Eindruck. Häufig nimmt man bei ihnen zu überzähligen Systemen seine Zuflucht. Läßt sich zwischen zwei Teiltafeln keine gemeinsame Leiter einer Hifsveränderlichen als Zapfenlinie schaffen, so greift man zu Notbehelfen wie Leitlinienscharen, »Gleitkurven«[2]), Wertesprüngen auf einer Leiter. Hinter jedem dieser Auswege versteckt sich ein überzähliges System, das zwar harmloser ist, weil es einer nicht als Unbekannte auftretenden Hilfsvariablen zukommt, das aber den Ableseweg weitläufiger macht. Auch leidet die Genauigkeit bei mehrfach gebrochenem Ableseweg. Wie vollzieht man überhaupt praktisch die Ablesung bei solchen mehrfach zusammengesetzten Fluchtentafeln? Ich vermute stark, daß man sich bei jeder Einzellösung die Brechungspunkte auf den Zapfenlinien mit dem Bleistift anmerkt, wenn man nicht gar jedesmal die Fluchten wirklich mit dem Bleistift zieht. Jedenfalls empfehlen die Amerikaner[3]), die derartige zusammengesetzte Fluchtentafeln in amerikanischen Mengen auf den Markt geworfen haben, ein durchsichtiges Blatt aus Zellhorn (Zelluloid) auf einer Seite mit feinem Schmirgelleinen rauh zu reiben, mit der rauhen Seite nach oben auf das Nomogramm zu legen und die Fluchtlinien mit weichem

---

[1]) F. A Halsey, Handbook for Machine Designers, Shopmen and Draftsmen, New York 1916.

[2]) Vergl. H. Schwerdt, diese Zeitschr. 4 (1924), S. 314 bis 323. Die Bezeichnung »Gleitkurve« scheint mir anfechtbar, da »Gleiten« mit der Vorstellung eines Schubs verbunden ist. Ich halte diese Bezeichnung auch für überflüssig, da die hier vorliegende geometrische Beziehung Berührung heißt. Die von Schwerdt als Darstellung einer beliebigen Gleichung mit drei Veränderlichen angegebene »Gleitkurventafel« brachte in derselben Allgemeinheit schon d'Ocagne (Traité de N., 1. Aufl., 1899, Nr. 58, 2. Aufl., Nr. 59) unter der Bezeichnung »allgemeines Berührungsnomogramm« (abaque tangentiel général). Er maß dieser Form keine große Bedeutung bei. Uebrigens fällt das Verfahren, nach dem Schwerdt auf S. 322 eine verstreckte Netztafel in eine Fluchtentafel verwandelt, unter die Methode, die d'Ocagne in dem auf den eben angeführten folgenden Paragraphen seines Werkes angegeben hat. Auch Soreau brachte wiederholt Beispiele zu diesem Verfahren. Meines Wissens ist auch noch keine andere praktisch bequeme Methode der graphischen Uebersetzung einer Geradentafel in eine Fluchtentafel angegeben worden.

[3]) Bliss, Amer. Machinist, 22. April 19 5 Halsey, a. a. O., Vorwort zur 2. Aufl.

Bleistift darauf zu zeichnen. Die Linien können dann mit dem Radiergummi immer wieder ausgelöscht werden. Das ist umständlich, aber nur so kann man bei einer zusammengesetzten Fluchtentafel ein System zusammengehöriger Werte der Veränderlichen gleichzeitig überschauen und festhalten.

Hier bringen nun Hrn. Kretschmers Tafeln und ihre allgemeineren Formen eine bedeutsame Wendung. Sie sind Gebilde aus einem Guß. Mit einer einzigen Einstellung des Schiebeblatts werden bei diesen naturgemäßen Verallgemeinerungen der Rechenschieber ins Zweidimensionale alle Werte eines Satzes zusammengehöriger Werte der Veränderlichen gleichzeitig überschaubar; ja man kann sogar mehrfach unendlich viele derartiger Sätze festhalten, gleichzeitig überschauen und bequem variieren. Ueberzählige Systeme werden dabei vermieden, so daß jede Veränderliche als Unbekannte auftreten kann. Man halte etwa die beiden von R. Soreau[1]) für die Blechdicke von Flammrohren entworfenen zusammengesetzten Fluchtentafeln gegen die Abb. 2, wobei auch zu beachten ist, daß Soreaus Tafeln beide für d ein überzähliges System haben. Der Vorteil, daß die Zahl der Netze zugunsten einfacher Leitern auf ein Mindestmaß herabgedrückt ist und daß als Ablesegeräte nur Gerade und Geradenkreuz nötig sind, scheint mir mit dem umständlichen und unübersichtlichen Ableseverfahren zu teuer erkauft.

5. Tafeln für Eisenbeton. Die Tafel Abb. 4 (S. 184) für die Formeln aus dem Eisenbetonbau hat als ein ihrer Natur fremdes Element das Fluchtungsverfahren hinzugenommen, das die Handhabung unbequem macht. Statt der Darstellung aller Formeln in einem einzigen Nomogramm, die den Benutzer verwirren kann, schlage ich für jede Formel eine besondere Rechentafel vor. Abb. 3 ist die Tafel für die zweite der drei Formeln. Für die beiden anderen lassen sich ähnliche Nomogramme entwerfen. Ist gegeben $\sigma_e = 800$, $\sigma_b = 30$, $b = 35$, $M = 1500$, so legt man die b-Leiter des Schiebeblatts so an die wagerechte Linie $\sigma_e = 800$, daß die Linie $\sigma_b = 30$ durch den Teilstrich $b = 35$ geht. Dann geht durch den Teilstrich $M = 1500$ die Linie $h' = 30$. Diese Tafel, die sich auch leicht in einen Schieber umbilden ließe, bei dem ein Läufer den Netzpunkt (σ_e, σ_b) auf die Zungenteilung (b) herunterholen könnte[2]), enthält nur ein einziges Netz und vermeidet die Brechungen des Ableseweges an einer »Wanderkurve«[3]). Die Linien h' und σ_e sind auf logarithmischem Papier vorhanden und die Leitern (b) und (M) kann man von einem

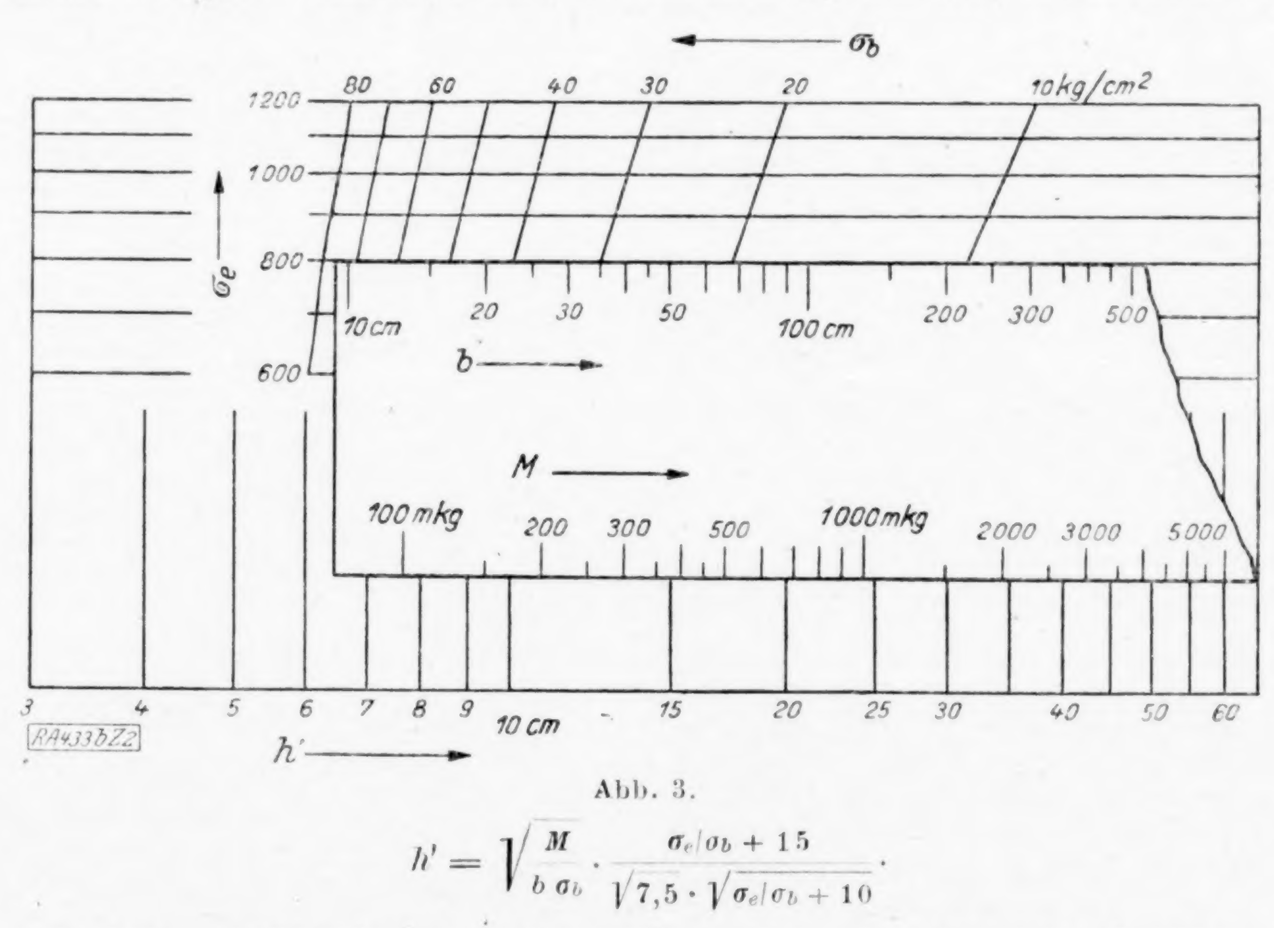


Abb. 3.

$$h' = \sqrt{\frac{M}{b\,\sigma_b}} \cdot \frac{\sigma_e/\sigma_b + 15}{\sqrt{7{,}5 \cdot \sqrt{\sigma_e/\sigma_b + 10}}}.$$

Beispiel: $\sigma_e = 800$ kg/cm², $\sigma_b = 30$ kg/cm², $b = 35$ cm, $M = 1500$ mkg, $h' = 30$ cm.

[1]) Nomographie, I, S. 404 und S. 457.

[2]) Der Schieber hat eine verdichtete, binäre Leiter (σ_e, σ_b).

[3]) Zeichnet man die Teilungen für M und b mit ein und demselben Träger auf das Grundblatt, so kann auch der Stechzirkel verwandt werden.

Bogen logarithmischen Papiers von halb so großem Maßstab [1]) abschneiden und so zusammenkleben, daß dem Punkt $b = 100$ der Punkt $M = 750$ genau gegenübersteht. Die Einzeichnung der -Linien σ_b erfordert allerdings etwas mehr Arbeit als das Zeichnen einer »Wanderkurve«. Da diese Linien aber sehr gestreckt sind, genügt die Berechnung weniger Punkte, und dieser Mehrarbeit steht der dauernde Vorteil der bequemeren Benutzbarkeit gegenüber.

Zur Begründung zerlege man die Gleichung für h' unter Einführung einer Hilfsveränderlichen ζ in die Gleichungen

$$\zeta = \frac{\sigma_e/\sigma_b + 15}{\sqrt{\sigma_e + 10\,\sigma_b}} \quad \text{und} \quad \frac{h'}{\zeta} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{7{,}5\,b}}.$$

ζ ist die logarithmische Abszisse, σ_e die logarithmische Ordinate des Netzes, das die erste dieser Gleichungen darstellt.

Uebrigens wäre es möglich, das Netz durch eine Anamorphose in der Ordinatenrichtung (etwa auf graphischem Wege) so umzuwandeln, daß die σ_b-Linien sich mit hinreichender Genauigkeit zu Geraden strecken. Damit wäre auch der Anwendung des Fluchtlinienverfahrens die Tür geöffnet, und die Formel ließe sich dann z. B. durch eine zusammengesetzte Fluchtentafel darstellen, die aus parallelen geradlinigen logarithmischen Leitern für M, b, h', σ_e, zwei dazu parallelen Zapfenlinien und einer schwach gekrümmten Leiter für σ_b bestände [2]). 433 b

[1]) Für das Grundblatt wählte ich das Papier Schleicher & Schüll Nr. $370\,{}^1/_2 \cdot 8$, für das Schiebeblatt Nr. $366\,{}^1/_2$. Das Maßstabverhältnis der beiden Papiere muß allerdings genau 2 : 1 sein, was bei den käuflichen Papieren nicht immer der Fall ist.

[2]) Inzwischen erschien der »Beitrag zur Verwendung der Nomographie in der Eisenbetonrechnung« von F. Eisner und W. Kretschmer (Beton und Eisen, Bd. 24, Februar 1925). Das Wertvollste in dieser Arbeit scheint mir die »Schlußbemerkung« zu sein, welche die übrigen Ausführungen der Arbeit überflüssig macht. In dieser Schlußbemerkung werden die drei Eisenbetonformeln ebenfalls näherungsweise verstreckt; auch wird, wie bei meiner obigen Anregung, auf die sich hieraus ergebende Möglichkeit einfacherer Rechentafeln hingewiesen. Meine Arbeit lag Hrn. Kretschmer seit Juni 1924 im Manuskript vor. In der genannten Veröffentlichung ist nichts darüber gesagt, ob jene Schlußbemerkung vor oder nach diesem Zeitpunkt abgefaßt ist. Eisner und Kretschmer verstrecken die S. 183 von Kretschmer mit φ_1, φ_2, φ_3 bezeichneten Funktionen, was auch zweckmäßiger ist, als die Verstreckung der Funktion ζ. Auch ich hatte in der Zwischenzeit die Verstreckung der Funktionen φ ins Auge gefaßt. Doch halte ich das von Eisner und Kretschmer angewandte, von Schwerdt angegebene Ausgleichverfahren hier wie in den meisten derartigen Fällen nicht für angemessen. Ich gebe vielmehr den Logarithmen gleiche Gewichte. Auf die Begründung gehe ich hier nicht ein. Bei den rohen theoretischen und empirischen Grundlagen dieser Eisenbetonformeln genügt es also wohl, die flache Kurve nach dem Augenmaß durch eine Gerade zu ersetzen.

KLEINE MITTEILUNGEN

Nomogramme für die Oberfläche des Quaders. Im folgenden bespreche ich fünf graphische Tafeln zur Berechnung der Oberfläche des Quaders aus den Kantenlängen, und zwar: 1. eine Z-Tafel, 2. eine Fluchtentafel mit einem Netz, 3., 4. und 5. drei Tafeln mit verschiebbaren bezifferten Leitern. Die drei letzten Tafeln gehören zur Gruppe der Nomogramme mit einem verschiebbaren Blatt oder zweidimensionalen Rechenschieber, die erst in jüngster Zeit der Franzose Margoulis [1]) systematisch behandelt hat. Beispiele von der Art meiner Abbildungen 3 und 4 bei denen krumme bezifferte Leitern verschoben werden, sind mir in der Literatur noch nicht begegnet.

In einer technischen Zeitschrift wurde jüngst die nomographische Preisberechnung von Postkisten behandelt [2]). Da der Verfasser hierbei den Preis proportional der Oberfläche setzt, so handelt es sich, wenn man von der Vervielfältigung mit einem veränderlichen Teuerungsfaktor absieht, die in der Arbeit durch Anhängung einer logarithmischen Multiplikationstafel bewerkstelligt wird, um die Aufgabe:

Aus den Kanten a, b, c eines Quaders seine Oberfläche f nomographisch zu berechnen.

Es ist also die Gleichung mit 4 Veränderlichen

$$f = 2\,(ab + ac + bc) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

graphisch zu vertafeln.

[1]) Compt. rend. Paris 1923, I, S. 824 bis 826. Näheres über diese Tafeln, für die ich den Namen Flächenschieber vorschlage, vergl. in der Zuschrift von Hrn. Kretschmer (diese Zeitschrift 5 [1925], S. 182 bis 184) und meinen voranstehenden Aufsatz.

[2]) B. Stahl, Preisberechnung bei veränderlichen Grundpreisen unter Zuhilfenahme der Rechentafel, Maschinenbau, 1923, Heft 5, S. 115 bis 117.

Mit Rücksicht auf die Zuschläge für Ueberlappen usw. behandelt die Arbeit allerdings die etwas abgeänderte Funktion

$$f = 2\,(a'b' + a'c' + b'c') - 2a' \quad . \; . \quad (1a),$$

worin $a' = a + 2$, $b' = b + 2$, $c' = c + 2$ ist. Da Rechentafeln für die Oberfläche des Quaders nach der Formel (1) von allgemeinerem Belang sein dürften, so behandle ich die Vertafelung dieser Formel (1). Weil es aber wichtig ist, daß sich eine Methode auch den Besonderheiten anpassen kann, die die Praxis im einzelnen Fall mit sich bringt, so zeige ich am Schluß dieser Arbeit, mit welchen geringfügigen Funktionsänderungen meine Verfahren auch für die Gleichung (1a) brauchbar werden.

Die in der oben genannten Arbeit entworfene Tafel (a. a. O., S. 116, Bild 4) enthält, wenn man die erwähnte letzte Teiltafel für die Vervielfältigung mit der Teuerungszahl wegläßt, acht bezifferte Leitern, nämlich 6 Leitern für Eingangswerte, zwei für a, zwei für b, eine für c, eine für $a + b$, ferner 2 Leitern, auf denen ein Wertesprung auszuführen ist und endlich drei Zapfenlinien. Um einer Gleichung von 4 Veränderlichen willen hat man also dem Vorteil der parallelen logarithmischen Leitern zuliebe eine solche Häufung von Ablese-Operationen in Kauf genommen, daß wesentliche Vorteile der Nomographie, vor allem die Uebersichtlichkeit und die schnelle Ausführbarkeit der Rechnung verloren gehen und auch die Genauigkeit recht fraglich wird. Auch darf bei dieser Tafel nur f die Unbekannte sein, während man doch Tafeln bevorzugt, bei denen jede der Veränderlichen als Unbekannte auftreten kann.

Eine viel einfachere Tafel, die allerdings keine logarithmischen Leitern enthält, bekäme man schon folgendermaßen:

Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$a^2 + f/2 = (a + b) : \frac{1}{(a + c)} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und betrachtet man a, $(a + b)$, $(a + c)$, f als die Veränderlichen, so ist die Gleichung von der Form $f_1 + f_2 = \frac{f_3}{f_4}$ und läßt sich durch eine Z-Tafel darstellen[1]). Die Summen $(a + b)$ und $(a + c)$ sind jedesmal im Kopf zu bilden. Die Tafel besteht aus nur vier geradlinigen Leitern, die auf drei Trägern untergebracht werden können. Jedoch wäre die reziproke Leiter für $(a + c)$ nur für gewisse Wertebereiche brauchbar und außerdem dürfte auch bei dieser Rechentafel a nicht als Unbekannte auftreten.

Nach Möglichkeit sucht man aber zu erreichen, daß ein Rechenblatt nur Leitern oder Linienscharen für die ursprünglichen Veränderlichen (also hier für a, b, c, f) enthält, und zwar für jede dieser Veränderlichen nur eine Leiter oder Linienschar (also keine überzähligen Systeme), damit jede der Veränderlichen als Unbekannte auftreten kann. Ferner wünscht man, daß möglichst mit einer einzigen Einstellung des Ablesegeräts die zusammengehörigen Werte aller dieser Veränderlichen gleichzeitig überschaubar werden, damit man durch Veränderung der Einstellung leicht die dem Ingenieur so wertvollen beliebigen Variationen der zusammengehörigen Werte herbeiführen kann. Um wieviel, so fragt man beispielsweise, muß ich c kleiner machen, wenn a um 0,5, b um 1,5 zunimmt und f unverändert bleiben soll? Im folgenden will ich nach verschiedenen Methoden für die Oberfläche des Quaders Tafeln entwerfen, die diese Forderungen erfüllen[1]).

Es sei noch bemerkt, daß die Gleichung (1) zu der schwierigeren Art von Gleichungen mit 4 Veränderlichen gehört, bei denen es nicht möglich ist, durch eine Umformung zwei der Veränderlichen (z. B. f und a) auf die eine Seite und die beiden anderen (b und c) auf die andere Seite der Gleichung zu bringen.

1. Eine Fluchtentafel mit einem Netz. Wir schreiben die Gleichung (1) in der Form

$$a\,(b + c) + b\,c - f/2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Da die Gleichung in a und f linear ist[2]), so können wir eine Verstreckung versuchen. Wir setzen

$$x = b + c, \qquad y = b\,c \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

x und y sind hier keine Koordinaten sondern Hilfsveränderliche. Die Ausmerzung (Elimination) von c aus diesen beiden Gleichungen ergibt die in x und y lineare Gleichung

$$y - b\,x + b^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und die Ausmerzung von b aus den Gleichungen (4) ergibt ebenso

$$y - c\,x + c^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Setzt man ferner die Werte (4) in die Gleichung (3) ein, so erhält man

$$y + a\,x - f/2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Da die Gleichungen (5), (6) und (7) in x und y vom ersten Grade sind, so ist die Verstreckung gelungen. Merzt man jetzt x und y aus den Gleichungen (5), (6) und (7) aus, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & -b & b^2 \\ 1 & -c & c^2 \\ 1 & a & -f/2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \quad (8).$$

[1]) Vergl. M. v. Pirani, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik, 1. Aufl. § 30, S. 121, Gleichung (6). P. Werkmeister gibt (Ztschr. f. ang. Math. u. Mech., 4, 1924, Heft 3, S. 260 bis 265) neben der Z-Tafel noch andere Tafelformen für die obige Gleichung an.

[1]) Läßt man Probieren zu, so kann die Gleichung (1) auch mit Hilfe einer Rechentafel für die allgemeine Gleichung dritten Grades gelöst werden. Denn $f/2$ ist der Koeffizient des linearen Gliedes der Gleichung, die a, b und c zu Wurzeln hat.

[2]) Hinreichend wäre schon, wenn die Gleichung in zwei Funktionen $\varphi\,(a, f)$ und $\psi\,(a, f)$ linear wäre. Ueber die im folgenden angewandte Eliminationsregel vergleiche man diese Zeitschrift 4, 1924, S. 66.

Damit ist die linke Seite der Gleichung (3) auf die für eine Fluchtentafel erforderliche Determinantenform gebracht. Multipliziert man noch die zweite Spalte dieser Determinante mit dem Maßstabfaktor $-\lambda$ und die dritte mit dem Maßstabfaktor μ, und versteht unter x und y jetzt rechtwinklige oder schiefwinklige kartesische Koordinaten, so sagt die Gleichung (8) aus, daß die drei Punkte

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda b \\ y=\mu b^2 \end{array}\right\} (9), \qquad \left.\begin{array}{l} x=\lambda c \\ y=\mu c^2 \end{array}\right\} (10),$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-\lambda a \\ y=-\mu f/2 \end{array}\right\} (11)$$

auf einer Geraden liegen. Die Gleichungspaare (9) und (10) stellen ein und dieselbe, mit b oder c bezifferte, gewöhnliche Parabel dar, deren Punkte sich nach diesen Gleichungen leicht errechnen und zeichnen lassen. Die Gleichungen (11) stellen zwei Scharen von Parallelen zu den Koordinatenachsen dar.

Bild 1 ist die verkleinerte Wiedergabe der mit den Werten $\lambda = 10$ mm, $\mu = 1$ mm gezeichneten Tafel. Um ihr eine günstige Form zu geben, wählte ich den Winkel der Koordinatenachsen zu 120°. Das Dreieckspapier von Carl Schleicher & Schüll in Düren lieferte ohne weiteres das erforderliche Koordinatennetz. Zur Erläuterung habe ich die Koordinatenachsen eingezeichnet.

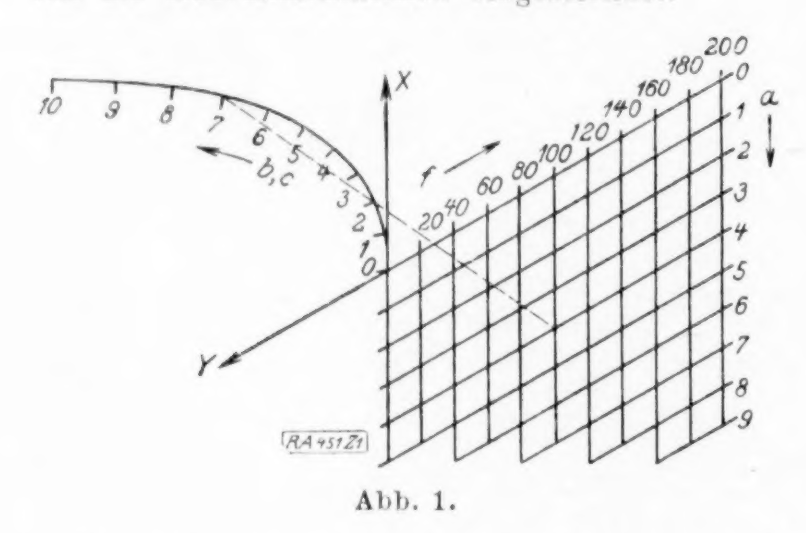


Abb. 1.

Die eingezeichnete Stellung des Weisers zeigt, daß für $b=7$, $c=2$, $a=4$ der Wert $f=100$ herauskommt.

Was die Bereiche betrifft, so lassen sich zwar die mit 0 beginnenden Bereiche von a, b, c und f beliebig hoch ausdehnen. Ist aber f gesucht, so wird das Ergebnis um so ungenauer, je näher b und c zusammenliegen und je größer a ist. In diesem Falle wird man deshalb die größte und die kleinste Kante auf der Leiter für b und c ansetzen. Sind alle drei Kanten nicht sehr voneinander verschieden, so ist der Ungenauigkeit bei dieser Form der Tafel nicht abzuhelfen. Bewegen sich die Werte von zwei Kanten b und c in zwei begrenzten, voneinander getrennten Bereichen, so kann in geeigneten Fällen eine projektive (homographische, kollineare) Transformation das Bild verbessern. Man kann z. B. die Parabel derart in eine Hyperbel umwandeln, daß diese auf ihrem einen Ast die b-Werte und auf ihrem anderen Ast die c-Werte trägt und daß zwischen beiden Aesten das Netz (a, f) liegt. Es erhöht stets die Genauigkeit, wenn das System der gesuchten Veränderlichen (f) zwischen die Systeme der gegebenen Veränderlichen (die Leitern für b und c) zu liegen kommt. Doch macht eine solche Umformung viel mehr Rechen- und Zeichenarbeit als das sehr rasch herstellbare Bild 1.

Analog der oben in den Gleichungen (4) bis (8) ausgeführten Verstreckung ist noch folgende andere Verstreckung möglich:

$$x = a, \qquad y = f \quad . . . \ (4\,a)$$

$$x \qquad -a = 0 \quad . . . \ (5\,a),$$

$$y \qquad -f = 0 \quad . . . \ (6\,a),$$

$$x\,(b+c) - y/2 + bc = 0 \quad . . . \ (7\,a),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -f \\ b+c & -1/2 & bc \end{vmatrix} = 0 \quad . . \ (8\,a).$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist die erzeugende Determinante einer Familie projektiv verwandter Fluchtentafeln mit zwei geraden Leitern für a und f und einem Netz von b- und c-Geraden, die einen Kegelschnitt einhüllen. Diese Familie ist dual zu der von der Determinante der Gleichung (8) erzeugten Familie, und die Gleichungen (5) bis (7) stellen einen ihrer Vertreter dar, wenn man in ihnen x und y als kartesisch Koordinaten deutet.

2. Eine Kurventafel auf logarithmischer Grundlage mit einer geradlinigen logarithmischen Leiter als Weiser. Die Gleichung (1) läßt sich schreiben:

$$f/2 = a\,(b+c) + bc$$

oder[1])

$$10^{\log (f/2)} = 10^{\log a + \log (b+c)} + 10^{\log b + \log c} \quad (12).$$

Nun zeichne ich auf dem Grundblatt unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems das Netz

$$\left.\begin{array}{l} x_{b,c} = \log (b+c) \\ y_{b,c} = \log (bc) = \log b + \log c \end{array}\right\} \ . \ (13)$$

und die Kurvenschar

$$10^{\log (f/2)} = 10^{x_f} + 10^{y_f} \quad . . . . \ (14).$$

In diesen Gleichungen wurden den laufenden Koordinaten x und y die Buchstabenzeiger (b, c) und f gegeben, um die Zugehörigkeit des Punktes (x, y) zu dem betreffenden System zu kennzeichnen.

Ferner zeichne ich auf dem verschiebbaren Blatt die Leiter

$$\left.\begin{array}{l} x_a = \log a \\ y_a = 0 \end{array}\right\} \quad . . . . \ (15).$$

Auch hier deutet der Zeiger a die Zugehörigkeit zur Leiter (a) an.

---

[1]) In der folgenden Gleichung (12) ist die Gleichung (1) auf die von Margoulis angegebene allgemeine Form gebracht, die in meiner oben angeführten Zuschrift abgeleitet wird.

Nun geht die Gleichung (14) in die Gleichung (12) über, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{l} x_f = x_a + x_{b,c} \\ y_f = y_a + y_{b,c} = y_{b,c} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (16).$$

Das bedeutet: Man lege die logarithmische Leiter (15) so auf das Grundblatt, daß ihr mit 1 bezifferter Anfangspunkt auf den Punkt $(x_{b,c}, y_{b,c})$, d. h. auf den Netzpunkt (b, c) fällt und daß der Träger der Leiter (15) parallel zur X-Achse des Grundblatts liegt. Dann fällt der mit a bezifferte Punkt (x_a, y_a) dieser logarithmischen Leiter auf den Punkt (x_f, y_f), d. h. auf die mit f bezifferte Kurve der Schar (14).

Benutzt man doppelt logarithmisches Papier, und bezeichnet man mit $\bar{x}$, $\bar{y}$ die Bezifferungen der logarithmischen Koordinatenlinien, so schreiben sich die Gleichungen (13) und (14) folgendermaßen:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = b + c \\ \bar{y} = bc \end{array}\right\} \quad (13\,\mathrm{a}), \qquad f/2 = \bar{x} + \bar{y} \quad (14\,\mathrm{a}).$$

Diese Kurven lassen sich ohne jede Rechnung in das logarithmische Netz punktweise einzeichnen. Das Netz (13a) zeichnet man ebenso, wie man auf gewöhnlichem Koordinatenpapier (Millimeterpapier) das Netz $x = b + c$, $y = bc$ zeichnen würde. Auf dem Papier Schleicher & Schüll Nr. $370^1/_2 \cdot 8$ findet man z. B. die mit 2 bezifferte b-Kurve, indem man vom Netzpunkt $\bar{x} = 2{,}5$; $\bar{y} = 1$ ausgehend immer eine Masche nach rechts und zwei nach oben weiter geht. Noch leichter sind die f-Kurven einzutragen, die ja das logarithmische Bild der Geradenschar $f/2 = x + y$ sind.

Bild 2 stellt das Gerippe der Tafel dar. Die unten sichtbare a-Leiter muß man sich auf einem besonderen Papierstreifen aufgezeichnet denken.

Sind z. B. gegeben die Kantenlängen 1, 3, 8, so bezeichne man folgendermaßen: $a = 3$, $b = 1$, $c = 8$. Man stelle also den Anfangspunkt 1 der a-Leiter auf den Netzpunkt $b = 1$, $c = 8$ des Grundblattes ein und halte dabei die a-Leiter so, daß sie parallel den in das Grundblatt eingezeichneten, nur der Ausrichtung der a-Leiter dienenden wagerechten Linien steht. Dann fällt der Punkt $a = 3$ der a-Leiter auf die Kurve $f = 70$. Man kann aber auch setzen: $a = 8$, $b = 1$, $c = 3$. Man stelle in diesem Falle den Anfangspunkt 1 der a-Leiter auf den Netzpunkt $b = 1$, $c = 3$ des Grundblattes ein und halte die a-Leiter wieder parallel zu den wagerechten Richtlinien. Dann zeigt der Leiterpunkt $a = 8$ den Wert $f = 70$ in der Kurvenschar an.

Statt auf einem Papierstreifen kann man die a-Leiter auch auf dem Grundblatt entwerfen. Man greift dann die Strecke zwischen den Punkten 1 und a dieser Leiter mit dem Stechzirkel ab, setzt hierauf die eine Zirkelspitze auf den Netzpunkt (b, c) und die andere auf die durch den genannten Netzpunkt gehende Richtlinie. Diese zweite Zirkelspitze zeigt dann den gesuchten Wert f an. Auf diese Weise kann der Leser ohne weiteres Proberechnungen an Bild 2 ausführen.

Die Linien (b) und (c) bilden ein und dieselbe Schar und hüllen eine Gerade ein. Ist f gesucht, so wird man nach Möglichkeit wieder die größte und die kleinste Kante als b und c ansetzen, da in der Nähe der Hüllgeraden die Netzpunkte unsicher werden. Sind alle drei Kanten nahezu gleich, so ist die Tafel ebenso wie in demselben Falle Bild 1 schlecht zu gebrauchen. In der hier gezeichneten Form ist die Tafel bequem benutzbar, wenn b und c innerhalb der durch ein Bogenviereck begrenzten Bereiche $0{,}25 \leq b \leq 1$; $4 \leq c \leq 10$ liegen. Dagegen kann die Länge der dritten Kante a auf beliebige Wertebereiche ausgedehnt werden. Die Tafelform ist also brauchbar für die Oberflächenberechnung von Quadern, die die Form von flachen Schachteln, Platten, Brettern oder Latten haben.

Die Tafel läßt sich in der Ordinatenrichtung nach einem beliebigen Gesetz dehnen oder stauchen. Die f-Linien werden im allgemeinen das (b, c)-Netz durchsetzen. Sollte dies stören, so kann man für die f-Schar um eine beliebige Strecke C nach rechts schieben, wenn man gleichzeitig auf der a-Leiter als Einsatzpunkt statt des Punktes 1 einen Punkt wählt, der um die Strecke C weiter nach links liegt. In den Gleichungen (14) und (15) ist dann x_f durch $(x_f - C)$ und x_a durch $(x_a - C)$ zu ersetzen.

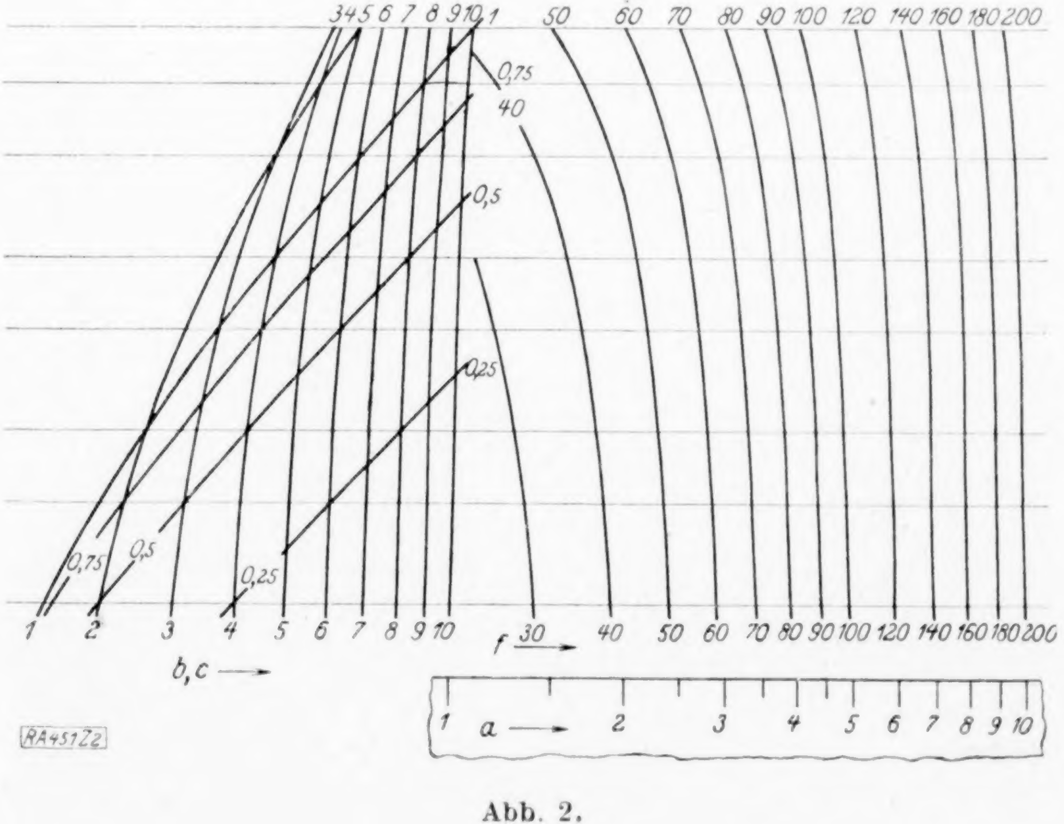


Abb. 2.

Vorteilhaft ist an der Tafel, daß mit wachsender Bezifferung die Linienscharen sich nach einem Gesetz zusammendrängen, das dem logarithmischen quantitativ nahe steht und daß auch die a-Leiter logarithmisch ist. Die relative Genauigkeit der Lösungen ist demnach in verschiedenen Wertebereichen annähernd dieselbe.

3. Eine Tafel mit einer bezifferten, krummen Schiebekurve als Weiser. Die Gleichung (1) läßt sich auch schreiben:

$$f = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\ . \quad (17)$$

Damit ist die Gleichung auf eine neue Weise auf die für zweidimensionale Schieber erforderliche Form gebracht.

Man zeichne hiernach auf dem Grundblatt die bezifferte Parabel

$$\left.\begin{aligned} x_a &= a^2 \\ y_a &= a \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (18)$$

und die Parabelschar

$$f = y_f^2 - x_f \quad \dots\dots\dots \quad (19).$$

Ferner zeichne man auf dem Schiebeblatt die bezifferten Parabeln

$$\left.\begin{aligned} x_b &= -\,b^2 \\ y_b &= -\,b \end{aligned}\right\} \ (20), \qquad \left.\begin{aligned} x_c &= c^2 \\ y_c &= c \end{aligned}\right\} \ (21).$$

Nun geht die Gleichung (19) in die Gleichung (17) über, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} x_f &= x_a + x_c - x_b \\ y_f &= y_a + y_c - y_b \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (22)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x_f - x_a &= x_c - x_b \\ y_f - y_a &= y_c - y_b \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (22\,a).$$

Das bedeutet: Das Schiebeblatt wird so auf das Grundblatt gelegt, daß die X-Achsen beider Blätter parallel stehen und der Leiterpunkt (b) des Schiebeblatts auf den Leiterpunkt (a) des Grundblatts fällt. Dann fällt der Leiterpunkt (c) des Schiebeblatts auf die Kurve (f) des Grundblatts.

In Bild (3) sind das Grundblatt und das Schiebeblatt dargestellt. Ist z. B. gegeben $a = 7$, $b = 4$, $c = 2$, so stelle man den Punkt $b = 4$ des Schiebeblatts auf den Punkt $a = 7$ des Grundblatts ein und halte dabei das Schiebeblatt so, daß sein unterer Rand parallel zu den unbezifferten, wagerechten Richtlinien des Grundblatts liegt. Dann fällt der Punkt $c = 2$ des Schiebeblatts auf die Linie $f = 100$ des Grundblatts.

Grundblatt und Schiebeblatt dürfen gleichzeitig in jeder der Koordinatenrichtungen nach einem beliebigen konstanten Maßstab gedehnt oder gestaucht werden. In Bild 3 wurde die Abszisseneinheit gleich $^1/_{10}$ der Ordinateneinheit gewählt. Ebenso wie bei Bild 2 empfiehlt es sich, für das Schiebeblatt nicht durchsichtiges Papier, sondern dieselbe Papiersorte wie für das Grundblatt zu wählen, da es hierbei wahrscheinlicher ist, daß beide Blätter sich unter dem Einfluß von Feuchtigkeit, Temperatur und Alter gleichmäßig ändern.

Im Gegensatz zu den beiden vorigen Tafeln bleibt die vorliegende auch gut brauchbar, wenn a, b und c nahezu oder völlig gleich werden. Die Tafel ist hier für den Bereich 0—10 für jede der Kantenlängen gezeichnet.

4. Ein Flächenschieber von der Art des vorigen, jedoch mit transzendenten Kurven. Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$f/2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot 10^{\log a + \log b + \log c} \quad (23),$$

so ergibt sich, entsprechend der vorigen Lösung, für das Grundblatt die Leiter

$$\left.\begin{aligned} x_a &= 1/a \\ y_a &= \log a \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (24)$$

und die Kurvenschar

$$f/2 = x_f\, 10^{y_f} \quad \dots\dots\dots \quad (25).$$

Die Elimination von a aus den Gleichungen (24) zeigt, daß der Träger der Leiter (24) eine der Kurven (25) ist.

Ferner erhält das Schiebeblatt die Leitern

$$\left.\begin{aligned} x_b &= -\,1/b \\ y_b &= -\,\log b \end{aligned}\right\} \ (26), \qquad \left.\begin{aligned} x_c &= 1/c \\ y_c &= \log c \end{aligned}\right\} \ (27).$$

Wieder wird die Einstellung des Schiebeblatts auf das Grundblatt ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_f - x_a &= x_c - x_b \\ y_f - y_a &= y_c - y_b \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (28).$$

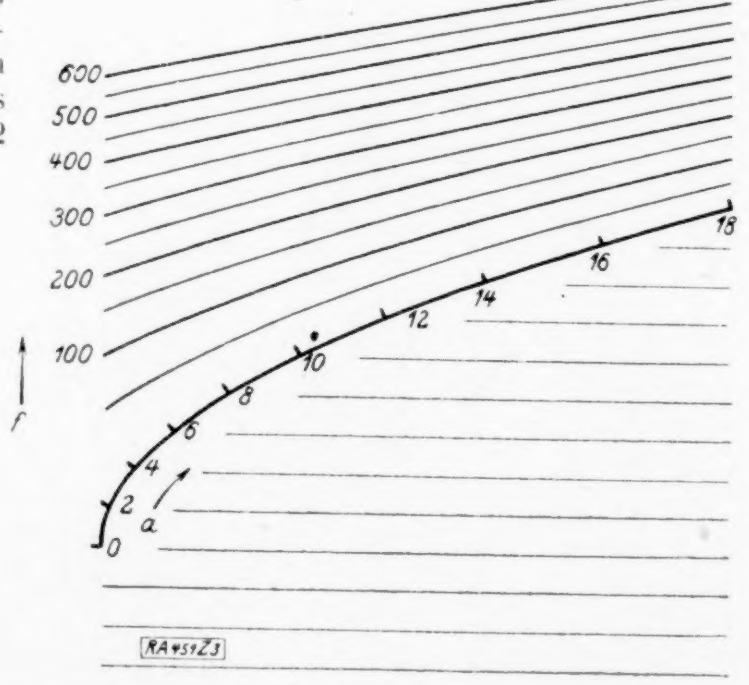


Abb. 3.

Die Elimination der 8 Größen x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c, x_f, y_f aus den 9 Gleichungen (24), (25), (26), (27), (28) ergibt wieder die Gleichung (23) oder (1).

Abb. 4 zeigt diesen Flächenschieber. Das Schiebeblatt, das auch hier nicht durchsichtig zu sein braucht, ist gestrichelt auf das Grundblatt gezeichnet und zeigt, daß sich für $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$ der Wert $f = 100$ ergibt. Die f-Linien sind in der Abbildung stark beschnitten.

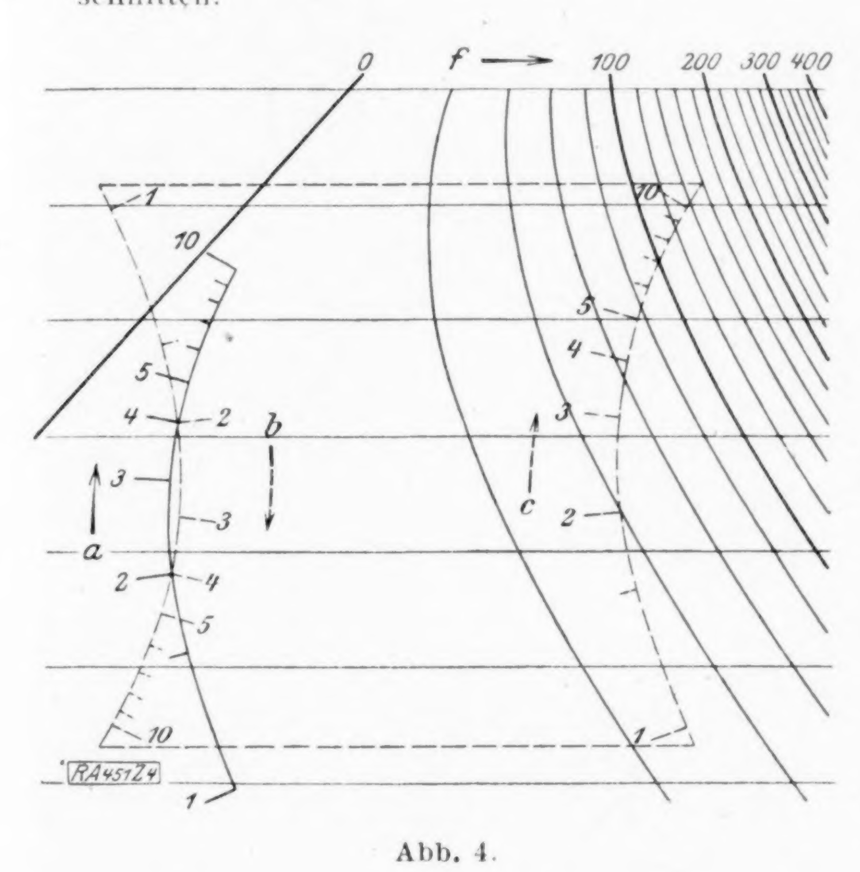


Abb. 4.

Am leichtesten herstellbar wäre diese Tafel mit Hilfe eines Koordinatenpapiers, dessen Abszissenachse eine Reziprokenteilung und dessen Ordinatenachse eine logarithmische Teilung hätte. Bezeichnet man nämlich mit $\bar{x}$, $\bar{y}$ die Bezifferungen eines Punktes dieses Papiers, so lautet die Gleichung der a-Leiter statt (24) jetzt

$$\bar{x}_a = a, \qquad \bar{y}_a = a \quad \ldots \quad (24\,a).$$

Die Gleichung der Kurvenschar (25) lautet jetzt

$$\bar{y}_f = f/2 \cdot \bar{x}_f \quad \ldots\ldots \quad (25\,a).$$

Alle Kurven der f-Schar sind, wie es auch bei Abb. 3 der Fall war, miteinander und mit dem Träger der a-Leiter kongruent und entstehen durch Parallelverschiebung einer einzigen unter ihnen.

Die b- und die c-Leiter des Schiebeblatts sind mit der a-Leiter des Grundblatts kongruent, und zwar liegt die c-Leiter genau so im Netz wie die a-Leiter, während die b-Leiter gegenüber dieser Lage um 180° gedreht ist.

Leicht läßt sich die Tafel auch auf einfach logarithmischem Papier herstellen, dessen Abszissenachse gleichförmig und dessen Ordinatenachse logarithmisch geteilt ist. Hat man eine einzige f-Kurve gezeichnet, so überträgt man sie auf ein Blatt Pauspapier, verschiebt dieses parallel zur Ordinatenrichtung und sticht die Punkte durch. In Abb. 4 ist das Blatt zum Schluß, um handlicher zu werden, um etwas weniger als 45° gedreht worden. Die Ordinatenachse ist die mit 0 bezifferte f-Linie. Die auf ihr senkrecht stehende Abszissenachse geht durch den Punkt 1 der a-Leiter.

Die vier ersten der vorstehend entwickelten Verfahren lassen sich durch folgende Funktionsänderungen auf eine Gleichung von der Form (1a) (S. 263) übertragen: In Gl. (2) (S. 263) setze man statt a^2 die Funktion $(a'^2 + a')$ und im übrigen statt a, b, c die Größen a', b', c'. In den Gleichungen (3) (S. 263) und (12) (S. 264) setze man statt $(b + c)$ die Funktion $(b' + c' - 1)$ und im übrigen statt a, b, c die Größen a', b', c'. Endlich setze man in der Gleichung (17) (S. 266) statt a^2 die Funktion $a'^2 + 2a'$ und im übrigen statt a, b, c die Größen a', b', c'. In den Tafeln werden natürlich schließlich die Leitern und Scharen für a, b, c gezeichnet und beziffert. Sie leiten sich aus denjenigen für a', b', c', entsprechend den Gleichungen $a' = a + 2$, $b' = b + 2$, $c' = c + 2$, in der einfachsten Weise ab.

Marburg. P. Luckey. 451

Ueber mechanische Ausgleichung. Man hat bekanntlich sehr viele mechanische Ausgleichsformeln, d. h. Formeln vom Typus

$$y_x = a_0 p_x + a_1 (p_{x-1} + p_{x+1}) + \ldots + a_n (p_{x+n} + p_{x-n})$$

vorgeschlagen und angewandt, wo die a positive Zahlen sind,

$$a_0 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = 1,$$

p_x der beobachtete, y_x der ausgeglichene Wert, die dem Werte x einer ganzzahligen Variablen entsprechen ($x = 0, 1, \ldots n$). Nicht aber, so viel ich weiß, die besonders einfache Formel

$$\left.\begin{aligned} y_x = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} [p_x + 1/\varepsilon (p_{x-1} + p_{x+1}) \\ + 1/\varepsilon^2 (p_{x-2} + p_{x+2}) + \ldots] \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

($\varepsilon > 1$), welche den großen Vorzug bietet, daß sie die Anzahl der Glieder frei läßt, die man rechts wirklich in Betracht ziehen will[1]). Diese Anzahl wird für jeden Wert von x vom numerischen Werte der vernachlässigten Summanden $p_{x-k-1} + p_{x+k+1}$ abhängen.

Formel (a) wird aber auch durch einen anderen bemerkenswerten Umstand ausgezeichnet; daß sie nicht aus der wiederholten und etwas blinden Anwendung der parabolischen Interpolation und Bildung von Mittelwerten und Mittelwerten von Mittelwerten entspringt, sondern aus einem Variationsprobleme, welches man als die analytische Formulierung dessen betrachten kann, was man von einer mechanischen Ausgleichung verlangt: nämlich

[1]) Bricht man bei dem $(k + 1)$-sten Gliede ab, so wird man natürlich ε^k durch $\varepsilon^{k-1}(\varepsilon - 1)$ ersetzen, denn es ist

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\left[1 + \frac{2}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \ldots \frac{1}{\varepsilon^{k-2}(\varepsilon - 1)}\right)\right] = 1 \cdot$$

daß der Polygonzug (x, y_x) möglichst regelmäßig sei und daß das System der Werte (x, y_x) möglichst wenig vom System (x, p_x) abweiche. Der zweiten Forderung können wir z. B. genügen, indem wir gemäß dem Prinzip der kleinsten Quadrate verlangen, daß

$$(y_0-p_0)^2+(y_1-p_1)^2+\ldots+(y_n-p_n^2)=\sum_0^{n+1}(y_x-p_x)^2$$

möglichst klein sei. Ganz analog wird uns die erste Forderung dahin führen, zu verlangen, daß die Summe der Quadrate der Längen der Seiten des Polygonzuges, dessen Ecken $y_0, y_1, \ldots, y_n$ sind, zu einem Minimum werde. Diese Summe ist aber gleich

$$n+1+\sum_0^n(\Delta y_x)^2.$$

Es wird also zu verlangen sein, daß $\sum_0^n(\Delta y_x)^2$ möglichst klein sei. Sind y_0 und y_n fest, so führt die Kombination der beiden Forderungen auf Variationsprobleme[1]) der Form

$$\sum_0^n\{(\Delta y_x)^2+\lambda(y_x-p_x)^2\}=\text{Minimum},\quad \lambda>0 \quad \text{(A)}$$

deren Lösung (a) ist, falls $\lambda=\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}-2$ ist.

Die angegebene Regelmäßigkeitsforderung ist natürlich nicht die einzige, die man vorschlagen könnte; sie scheint aber bei festen Grenzen die einfachste zu sein. Diese Variationsaufgabe wird im ersten Teil dieser Note behandelt.

Sind aber die Endpunkte nicht fest, sondern frei auf den Geraden $x=0$, $x=n$ beweglich, so ist das Minimum

$$\frac{(y_n-y_0)^2}{n+1}$$

von $\sum_0^n(\Delta y_x)^2$ um so größer, je größer $|y_n-y_0|$ ist, hängt also nicht nur von der Regelmäßigkeit ab. In diesem Falle empfiehlt sich ein anderes Variationsproblem. Einem geradlinigen Segmente entspricht nämlich der Wert 0 der Summe

$$\sum(\Delta^2 y_x)^2.$$

Man könnte daher diese Summe als Regelmäßigkeitskriterium benutzen und (A) durch das äquivalente Problem

$$\sum[(\Delta^2 y_x)^2+\lambda(y_x-p_x)^2]=\text{Minimum} \quad \text{(B)}$$

$(\lambda>0)$ ersetzen, falls (B) nicht zu viel komplizierteren Ausdrücken führte. Wir werden das Problem (B) im Falle beweglicher Endpunkte kurz behandeln. Die Resultate entbehren zwar der für die Praxis nötigen Einfachheit, können aber vielleicht als Ausgangspunkt für weitere Forschungen dienen.

I. Die Ausgleichung im Falle fester Endpunkte.

Ist

$$H=\sum_0^n\{(\Delta y_x)^2+\lambda(y_x-p_x)^2\} \quad \text{(B)}$$

so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\delta H=\sum_0^n[\delta\Delta y_x\cdot\Delta y_x+\lambda\,\delta y_x(y_x-p_x)]$$

$$=(\delta y_x\cdot\Delta y_x)_0^n-\sum_0^{n+1}[\delta y_{x+1}\cdot\Delta^2 y_x-\lambda\,\delta y_x(y_x-p_x)]$$

da wegen der Formel der partiellen endlichen Integration

$$\sum\delta\Delta y_x\cdot\Delta y_x=\delta y_x\cdot\Delta y_x-\sum\delta y_{x+1}\cdot\Delta^2 y_x.$$

Es ist also, falls $\delta y_0=\delta y_n=0$

$$\tfrac{1}{2}\delta H=\sum_0^n\delta y_x[\Delta^2 y_{x-1}-\lambda(y_x-p_x)]$$

$$\delta^2 H=\sum_0^{n+1}[(\delta y_x)^2+\lambda(\delta\Delta y_x)^2]>0$$

Der Funktion y_x, Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\Delta^2 y_{x-1}-\lambda y_x=-\lambda p_x \quad .\ .\ \text{(1)},$$

entspricht ein Minimum von H. Es seien ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ die reellen von einander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$u^2-(2+\lambda)u+1=0$$

der homogenen Differenzengleichung

$$\Delta^2 y_{x-1}-\lambda y_x=y_{x+2}-(2+\lambda)y_{x+1}+y_x=0.$$

Dann ist, falls a_1 und a_2 willkürliche Konstanten sind

$$y_x=a_1\varepsilon^x+a_2\varepsilon^{-x}-\lambda\sum p_{t+1}\frac{\begin{vmatrix}\varepsilon^{t+1} & \varepsilon^{-t-1}\\ \varepsilon^x & \varepsilon^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varepsilon^{t+1} & \varepsilon^{-t-1}\\ \varepsilon^{t+2} & \varepsilon^{-t-2}\end{vmatrix}}$$

$$=a_1\varepsilon^x+a_2\varepsilon^{-x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\Big\{\varepsilon^x\sum_{t=0}^{x}p_{t+1}\varepsilon^{-t-1}-\varepsilon^{-x}\sum_{t=0}^{x}p_{t+1}\varepsilon^{t+1}\Big\}$$

die allgemeine Lösung von (1)[1]).

Es kann natürlich $\varepsilon>1$ vorausgesetzt werden. Ist n groß (wie es immer in der biometrischen Statistik der Fall ist), so hat man mit sehr großer Annäherung aus den zwei a_1 und a_2 bestimmenden Gleichungen

$$y_0=a_1+a_2$$

$$y_n=a_1\varepsilon^{n-1}+a_2\varepsilon^{-n+1}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\Big\{\varepsilon^{n-1}\sum_{t=0}^{n}p_{t+1}\varepsilon^{-t-1}-\varepsilon^{-n+1}\sum_{t=0}^{n}p_{t+1}\varepsilon^{t+1}\Big\}$$

---

[1]) G. Bohlmann, (Ein Ausgleichsproblem, Göttinger Nachrichten 1899), behandelt zwar das Problem (A), setzt aber voraus, daß λ sehr groß sei, und begnügt sich, den angenäherten Ausdruck

$$y_x=p_x+1/\lambda\,\Delta^2 p_{x-1}+1/\lambda^2\,\Delta^4 p_{x-2}+\ldots$$

für y_x anzugeben. Die Allgemeinheit und die Einfachheit der Resultate werden dabei gleichzeitig geopfert.

[1]) Vergleiche über die Integration von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten A. A. Markoff, Differenzenrechnung, Leipzig 1896, Kap. XIII.

$$a_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \sum_{t=0}^{n} p_{t+1}\, \varepsilon^{-t-1}$$

$$a_2 = y_0 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \sum_{t=0}^{n} p_{t+1}\, \varepsilon^{-t-1}$$

$$y_x = y_0\, \varepsilon^{-x} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \Big[\varepsilon^x \sum_{t=x}^{n} p_{t+1}\, \varepsilon^{-t-1}$$

$$- \varepsilon^{-x} \sum_{t=0}^{n} p_{t+1}\, \varepsilon^{-t-1} + \varepsilon^{-x} \sum_{t=0}^{x} p_{t+1}\, \varepsilon^{t+1}\Big].$$

Die Summe rechts reduziert sich praktisch, die ersten Werte von x ausgeschlossen, auf

$$y_x = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \Big[p_x + 1/\varepsilon\,(p_{x-1} + p_{x+1})$$
$$+ 1/\varepsilon^2\,(p_{x-2} + p_{x+2}) + \ldots\Big].$$

II. Die Ausgleichung im Falle variabler Endpunkte.

Ist

$$K = \sum_{0}^{n+1} \left[(\Delta^2 y_x)^2 + \lambda\,(y_x - p_x)^2\right]$$

so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\,\delta K = \sum_{x=0}^{n+1} \left[\Delta^2 y_x\, \delta \Delta^2 y_x + \lambda\, \delta y_x \cdot (y_x - p_x)\right]$$
$$= \left[\delta y_{x+1}\,(\Delta^2 y_x - \Delta^3 y_x) - \delta y_x \cdot \Delta^2 y_x\right]_0^n$$
$$+ \sum_{x=0}^{n+1} \delta y_x \left[\Delta^4 y_{x-2} + \lambda\,(y_x - p_x)\right].$$

Die notwendigen Bedingungen dafür, daß K = Minimum sei, lauten

$$\left.\begin{aligned} \Delta^4 y_{x-2} + \lambda y_x = y_{x+2} - 4\, y_{x+1}\,(6 + \lambda)\, y_x \\ - 4\, y_{x-1} + y_{x-2} = \lambda\, p_x \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta y_1\,(\Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_0) - \delta y_0\, \Delta^2 y_0 = 0 \\ \delta y_{n+1}\,(\Delta^2 y_n - \Delta_3 y_0) - \delta y_n\, \Delta^2 y_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2\,\text{a}).$$

Es seien

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = 1 + \frac{\sqrt{\sqrt{\lambda^2 + 16\,\lambda} - \lambda}}{\sqrt{8}} \pm i \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{\sqrt{\sqrt{\lambda^2 + 16\,\lambda} + \lambda}}{\sqrt{8}}\right)$$

$$\varepsilon_3,\ \varepsilon_4 = 1 - \frac{\sqrt{\sqrt{\lambda^2 + 16\,\lambda} - \lambda}}{\sqrt{8}} \pm i \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{\sqrt{\sqrt{\lambda^2 + 16\,\lambda} + \lambda}}{\sqrt{8}}\right)$$

oder in trigonometrischer Form

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = \varrho\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$
$$\varepsilon_3,\ \varepsilon_4 = 1/\varrho\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, welche der homogenen Differenzengleichung

$$y_{x+4} - 4\, y_{x+3} + (6 + \lambda)\, y_{x+2} - 4\, y_{x+1} + y_x = 0$$

entspricht. Es ist auch, falls a_1, a_2, a_3, a_4 willkürliche Konstanten bedeuten,

$$y_x = a_1\, \varrho^2 \cos\varphi x + a_2\, \varrho^x \sin\varphi x + a_3\, \varrho^{-x} \cos\varphi x + a_4\, \varrho^{-x} \sin\varphi x$$

$$+ \sum_{t=0}^{x} p_{t+2} \frac{\begin{vmatrix} \varrho^{t+1}\cos\varphi(t+1) & \varrho^{t+1}\sin\varphi(t+1) & \varrho^{-t-1}\cos\varphi(t+1) & \varrho^{-t-1}\sin\varphi(t+1) \\ \varrho^{t+2}\cos\varphi(t+2) & \varrho^{t+2}\sin\varphi(t+2) & \varrho^{-t-2}\cos\varphi(t+2) & \varrho^{-t-2}\sin\varphi(t+2) \\ \varrho^{t+3}\cos\varphi(t+3) & \varrho^{t+3}\sin\varphi(t+3) & \varrho^{-t-3}\cos\varphi(t+3) & \varrho^{-t-3}\sin\varphi(t+3) \\ \varrho^{x}\ \cos\varphi x & \varrho^{x}\ \sin\varphi x & \varrho^{-x}\ \cos\varphi x & \varrho^{-x}\ \sin\varphi x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varrho^{t+1}\cos\varphi(t+1) & \varrho^{t+1}\sin\varphi(t+1) & \varrho^{-t-1}\cos\varphi(t+1) & \varrho^{-t-1}\sin\varphi(t+1) \\ \varrho^{t+2}\cos\varphi(t+2) & \varrho^{t+2}\sin\varphi(t+2) & \varrho^{-t-2}\cos\varphi(t+2) & \varrho^{-t-2}\sin\varphi(t+2) \\ \varrho^{t+3}\cos\varphi(t+3) & \varrho^{t+3}\sin\varphi(t+3) & \varrho^{-t-3}\cos\varphi(t+3) & \varrho^{-t-3}\sin\varphi(t+3) \\ \varrho^{t+4}\cos\varphi(t+4) & \varrho^{t+4}\sin\varphi(t+4) & \varrho^{-t-4}\cos\varphi(t+4) & \varrho^{-t-4}\sin\varphi(t+4) \end{vmatrix}}$$

$$= \varrho^x \Big\{\cos\varphi x \Big(a_1 - b_1 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{-t-1} p_{t+2} \cos\varphi t - b_2 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{-t-1} p_{t+2} \sin\varphi t\Big)$$
$$+ \sin\varphi x \Big(a_2 + b_2 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{-t-1} p_{t+2} \cos\varphi t - b_4 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{-t-1} p_{t+2} \sin\varphi t\Big)\Big\}$$
$$+ \varrho^{-x} \Big\{\cos\varphi x \Big(a_3 - b_3 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{t+1} p_{t+2} \cos\varphi t - b_4 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{t+1} p_{t+2} \sin\varphi t\Big)$$
$$+ \sin\varphi x \Big(a_4 + b_4 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{t+1} p_{t+2} \cos\varphi t - b_3 \sum_{t=0}^{x} \varrho^{t+1} p_{t+2} \sin\varphi t\Big)\Big\}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (2). b_1, b_2, b_3, b_4, die nur von λ abhängen, sind Brüche, deren gemeinsamer Nenner die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \varrho\ \cos 2\varphi & \varrho\ \sin 2\varphi & \varrho^{-1}\cos 2\varphi & \varrho^{-1}\sin 2\varphi \\ \varrho^2\cos 3\varphi & \varrho^2\sin 3\varphi & \varrho^{-2}\cos 3\varphi & \varrho^{-2}\sin 3\varphi \\ \varrho^3\cos 4\varphi & \varrho^3\sin 4\varphi & \varrho^{-3}\cos 4\varphi & \varrho^{-3}\sin 4\varphi \end{vmatrix}$$

und deren Zähler Determinanten dritter Ordnung sind, die aus der angegebenen Determinante entstehen, falls man die letzte Zeile und bzw. die erste, die zweite, die dritte, die vierte Kolumne abstreicht[1]).

Die Bedingungen ($2a$) dienen zur Festlegung von a_1, a_2, a_3, a_4, indem sie zu den linearen Gleichungen führen:

$$y_1 - y_0 = y_2 - y_1 = y_3 - y_4$$
$$y_{n+1} - y_n = y_{n+2} - y_{n+1} - y_{n+3} - y_{n+2}.$$

Und da andererseits y_x von p_2, p_3, $\ldots$ p_{x+1} abhängt, setzt die Ausgleichung des Systems von Werten p_0, p_1, $\ldots$ p_n voraus, daß man außer diesen Werten auch p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4} kennt.

Rom, Februar 1925. Ugo Broggi. 521

[1]) Ist $\lambda = 2$ so ist auch $p = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, $\varphi = \pi/4$; der Ausdruck für y_x wird besonders einfach. Im Falle, wo λ sehr groß ist, kann man wieder das Bohlmannsche Näherungsverfahren anwenden und man hat dann

$$y_x = p_x + 1/\lambda\, \Delta^4 p_{x-2} + 1/\lambda^2\, \Delta^8 p_{x-4} + \ldots$$

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. August Föppl zum 70. Geburtstag am 25. Januar 1924, gewidmet von seinen Schülern. Mit dem Bildnis August Föppls und 111 Abbildungen im Text. Verlag von J. Springer, Berlin 1924. 208 S.

Die Beiträge zur technischen Mechanik, die zum 70. Geburtstag August Föppls von seinen Schülern und Freunden zu einem Bande vereinigt wurden, geben ein gutes Bild von dem erstaunlich hohen Niveau, das die technisch-mechanische Forschung in Deutschland zurzeit einnimmt. Es ist nicht zuletzt das Verdienst Föppls, daß dieses Niveau erreicht wurde und dauernd gehalten wird.

Aus dem wertvollen Inhalt sei eine Arbeit v. Kármáns hervorgehoben, welche die Biegungstheorie für einen aus Steg und Gurt gebildeten Balkenträger vertieft; es wird der Bereich des Gurtes, über den sich im wesentlichen die Biegungsspannungen verteilen, als die »mittragende Breite« berechnet. Prandtl bespricht eine neue Begriffsbildung, die der »elastisch unbestimmten Systeme«. Darunter werden solche Belastungsfälle verstanden, bei denen die Formänderungen und Spannungen wesentlich von den etwa vorhandenen Vorspannungen abhängen, also unbestimmt bleiben, sobald die Vorspannungen nicht bekannt sind. Von den übrigen Aufsätzen seien hier wenigstens die Ueberschriften angeführt:

G. Bauer, Versuche über den Mischungsdruck von Gasen und Dämpfen; O. Föppl, Drehschwingungsfestigkeit und Schwingungsdämpfungsfestigkeit von Baustoffen; J. Geiger, Ueber Spannungsmessungen an Maschinenteilen und das hierzu verwendete Feinmeßgerät; K. Huber, Die Schubspannungen im gebogenen I-Balken; O. Mader, Betrachtung über den Wärmeübergang in der Verbrennungsmaschine; D. Thoma, Spannungen in dünnen zylindrischen Gefäßwänden; H. Hencky, Ueber ein einfaches Näherungsverfahren zur Bestimmung des Spannungszustandes in rechteckig begrenzten Scheiben; S. Timoschenko, Ueber die Biegung von Stäben, die eine kleine anfängliche Krümmung haben; L. Föppl, Bestimmung der Knicklast eines Stabes aus Schwingungsversuchen; L. Dreyfus, Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität; C. Weber, Der Verdrehungswinkel von Walzeisenträgern; H. Thoma, Neuzeitliche Hydrodynamik und praktische Technik; W. Schlink, Ueber Stabilität symmetrisch aufgebauter Baumfachwerke; M. Schuler, Eine Kreiselmessung zur Bestimmung der Erdachse; R. Düll, Das Verhalten des Schlickschen Schiffskreisels bei großen Ausschlägen des Kreiselrahmens; E. Schmidt, Ueber die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Anheiz- und Abkühlungsprobleme; F. Schwerd, Das Diagramm zu dem Atmen des Maschinengewehrlaufes und der Patronenhülse bei Schuß; W. Bäseler, Gleichgewichtsprofile für Seilbahnen; J. Schenk, Wirtschaft, Technik und ihre Schule.

Mises. 458

TH. V. **KÁRMÁN,** Professor am Aerodyn. Institut der Techn. Hochschule Aachen, und T. **LEVI-CIVITA,** Professor an der Universität Rom. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Mit 98 Abbildungen im Text. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. 251 S. Preis 13 GM, geb. 14 GM.

Stark verspätet erscheinen jetzt die Vorträge, die von einer kleinen Gruppe deutscher und ausländischer Gelehrter im Herbst 1922 in Innsbruck gehalten wurden. Ein großer Teil der in den Bänden zusammengefaßten Untersuchungen ist den Lesern dieser Zeitschrift aus früheren Veröffentlichungen der Verfasser bekannt, so die von Prandtl, Trefftz und Kármán. Darüber hinaus enthält der Band vor allem eine einleitende Uebersicht über den Anteil Italiens an den Fortschritten der klassischen Hydrodynamik in den letzten 15 Jahren von U. Cisotti, dann eine wertvolle Mitteilung von Levi-Civita über die Transportgeschwindigkeit in einer stationären Wellenbewegung; Oseen-Upsala referiert über seine eigenen Arbeiten zur analytischen Theorie der Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeit. Etwas problematisch erscheinen die kurzen Mitteilungen von Heisenberg über Turbulenz. Im ganzen wird jeder, der an der modernen Entwicklung der Hydro- und Aerodynamik Anteil nimmt, dem Buche eingehendes Studium zu widmen haben.

Mises. 458

G. **SACHS,** Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle. (X. 319.) Mit 232 Abb. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1925.

Die mechanische Technologie beruht auf der plastischen Deformation und grenzt damit an eine Reihe von Wissenszweigen, die den gleichen Vorgang zum Gegenstand haben. Sie ist verflochten mit der Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre, umfaßt wesentliche Teile der Metallographie und der Materialprüfung. Ihre Ergebnisse finden Anwendung in der Geologie, aus der sie selbst Anregungen schöpft.

Es ist eine große Aufgabe über ein solches Gebiet einen Ueberblick zu schaffen, doppelt schwer durch die oft ungeschulte Art der technischen Literatur, aus der man zu schöpfen hat. Das Buch ist ein erster kraftvoller Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe. Eine Stütze,

die jeder freudig ergreifen wird, der sich über den Gegenstand orientieren will.

Besondere Bedeutung hat das Werk für den modernen Physiker, der bisher das Gefühl hat, daß die plastische Verformung zur theoretischen Untersuchung noch nicht sauber genug herausgearbeitet ist. Hier sind die Ansätze gezeigt, die man für die strukturelle Grundlage dieses Vorganges in neuerer Zeit gesammelt hat. Sie vermitteln das Interesse zu den merkwürdigen Erfahrungen der Technologie. Es ist ein besonderes Verdienst des Verfassers, daß er auch im rein theoretischen Teil alles treffend richtig dargestellt hat.

Das Buch ist in drei Teile gegliedert:

1. Spannung und Verformung,
2. Kristalle und Verfestigung,
3. Aufbau und mechanische Eigenschaften.

Der erste Teil handelt von den Beziehungen zwischen den Kräften und den durch sie hervorgerufenen Verformungen. Nach einer kurzen Erörterung der mechanischen Eigenschaften von Flüssigkeiten und der Elastizitätskonstanten werden die Verfahren zur Feststellung der Elastizitätsgrenze und Streckgrenze und die verschiedenen Prüfverfahren: Zugversuche, Druckversuche, Torsionsversuche und Kerbschlagprobe besprochen. Weitere Abschnitte enthalten Betrachtungen über die Spannungsverhältnisse beim Eintreten plastischer Formänderungen und des Bruches, über den Zusammenhang zwischen dem Verformungszustand und der Verfestigung, über Kohäsion und Reißverfestigung, sowie über die Wirkung von Kerben.

Der zweite Teil beschreibt im ersten Abschnitt das Verhalten von Kristallen bei mechanischer Beanspruchung und die durch Verformung in Aggregaten hervorgerufenen Deformationsstrukturen. Der zweite Abschnitt führt in die Gesetzmäßigkeiten der Hysteresis- und Nachwirkungserscheinungen und der Ermüdung ein. Im dritten Abschnitt werden die Veränderungen der Eigenschaften durch Kaltverformung, die Rekristallisation, der Einfluß der Versuchstemperatur und Versuchsgeschwindigkeit, die Warmverformung und schließlich die verschiedenen Verfestigungstheorien ausführlich besprochen.

Leider sind die neuen Arbeiten von Prandtl, Hencky und Nádai noch nicht berücksichtigt, was im Vorworte auch erwähnt wird.

Der dritte Teil handelt von den Eigenschaften reiner Metalle und den Beziehungen zwischen dem Zustandsdiagramm und den mechanischen Eigenschaften. Die Eigenschaften von heterogenen Gemengen und von Legierungen, die Veränderungen im festen Zustande erleiden, werden auf ihre Gesetzmäßigkeit hin untersucht.

Wenn es dem Verfasser gelingt, die schnellwachsende Literatur in späteren Auflagen auch weiter zu beherrschen, und die begonnene Arbeit der Vereinheitlichung noch weiter zu führen, so kann sein Werk zum Mittelpunkt der Plastizitätsforschung werden.

M. Polanyi. 518

Dr. ULFILAS **MEYER** und Prof Dr. ADALBERT **DECKERT,** Posträte im Telegraphentechnischen Reichsamt Berlin. Tafeln der Hyperbelfunktionen. Formeln. Verlag Josef Kösel & Friedrich Pustet, Kommanditgesellschaft. Verlagsabteilung Kempten. 78 S.

Diese neuen Tafeln der Hyperbelfunktionen bringen in sehr übersichtlicher Anordnung die natürlichen Werte, wie auch die Logarithmen der Kreis- und Hyperbelfunktionen, sin, cos, tg, Sin, Cos, Tg. Die Logarithmen sind mit fünf Dezimalstellen, die natürlichen Werte mit rund fünf Ziffern angegeben, was ungefähr der gleichen Genauigkeit entspricht. Umfang und Anordnung der Tafeln ist nach Angabe der Verfasser in erster Linie durch die Bedürfnisse der Telegraphentechnik bestimmt; dem entspricht auch der ausführliche Anhang telegraphentechnischer Formeln. Auch die gebräuchlichen Formeln für das Rechnen mit Hyperbelfunktionen sind anhangsweise zusammengestellt. Eine fünfstellige Tafel der Reziproken $^{100}/_n$ ersetzt die Angabe der Funktion ctg und leistet auch sonst gute Dienste.

H. Pollaczek-Geiringer. 499

H. **SCHWERDT,** Studienrat am Falk-Realgymnasium in Berlin. Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Mit 137 Textabbildungen und 151 angewandten Aufgaben mit Lösungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. VIII + 265. Geb. 12,90 M.

Das vorliegende Werkchen von Schwerdt unterscheidet sich von anderen Büchern über den Gegenstand — solcher sind gerade im vergangenen Jahre recht viele erschienen — durch weitgehende Vertiefung der theoretischen Grundlagen. Wie schon der Titel sagt, behandelt der Verfasser die Nomographie als einen Teil der Geometrie, nicht als ein Nebeneinander von mehr oder minder unabhängigen Kunstgriffen. (Auf die geometrischen Wurzeln der Nomographie wird in ähnlicher Weise auch in Th. Schmids Darstellender Geometrie[1]) eingegangen.) Ausgehend von der »allgemeinen Verzerrung« (Anamorphose nach Lalanne) — dies ist nichts anderes als die durch zwei reelle stetig differenzierbare Funktionen $\xi = \xi(xy)$, $\eta = \eta(xy)$ vermittelte Abbildung der (xy)- auf die $(\xi\eta)$-Ebene —, werden systematisch die für die Nomographie wichtigen Verzerrungen untersucht, so vor allem die projektive Abbildung, da bei ihr gerade Linien als solche erhalten bleiben, sowie die Verzerrungen, die gewisse Kurven zu geraden Linien »strecken«.

Abgesehen von der systematischen Durchführung des abbildungsgeometrischen Prinzips ist die stoffliche Auswahl des Gebotenen eine ähnliche wie in anderen nomographischen Werken entsprechenden Umfangs: Der allgemeinen Theorie der Funktionsleiter folgt die Entwicklung der Netztafeln, Funktionentafeln und schließlich ein Abschnitt über »Rechentafeln

[1]) Vergl. dieses Heft, S. 276.

mit besondern Schlüsseln«. Im übrigen bietet Schwerdt auch dem Kenner der Nomographie manch Neues und Interessantes, so z. B. auf dem Gebiet der Genauigkeitsbetrachtungen. Die Aufgabensammlung ist sehr reichhaltig, oft recht weitgehend; kurze Hinweise für die Lösungen der Aufgaben vervollständigen sie. Im ganzen stellt das Buch eine durchaus bemerkenswerte Bereicherung der nomographischen Literatur dar.

H. Pollaczek-Geiringer. 498

W. **BLASCHKE,** Vorlesungen über Differentialgeometrie I. 2. Auflage (Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarstellungen, Bd. I). Verlag J. Springer, Berlin 1924.

Die neue Auflage von Blaschkes Differentialgeometrie unterscheidet sich von der ersten[1]) hauptsächlich durch einen von Herrn K. Reidemeister herrührenden Anhang über die »Blaschke-Kugel«, wo, einer von Blaschke gestellten Aufgabe entsprechend, gezeigt wird, daß die geschlossene Fläche, die die Eigenschaft hat, daß zwei von einem beliebigen Punkte der Fläche in zwei beliebigen Richtungen ausgehende geodätische Linien sich wieder in einem Punkte der Fläche treffen, die Kugel ist.

H. Pollaczek-Geiringer. 497

RUDOLF **ROTHE,** Dr. phil., o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Elementarmathematik und Technik. Eine Sammlung elementarmathematischer Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. Mit 70 Abbildungen. Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Band 54. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1924. IV + 52.

Der Verfasser will die Gedanken der modernen Technik im mathematischen Schulunterricht zur Geltung bringen und verwendet hierzu vor allem die Restbestände Reulauxscher Kinematik, verlängerte Kurbelschleife, Kurven konstanter Breite, die Nürnberger Schere, das Ovalwerk des Lionardo usw. Er lehnt in der Vorrede die üblichen »eingekleideten« Aufgaben als »an Schreibtisch ausgeheckte Tüfteleien« ab und bringt selbst z. B. folgende »Aufgabe 43: Auf einer Landstraße soll eine Stelle P so bestimmt werden, daß von dort aus die Vorderseite AB eines Schloßgebäudes am günstigsten, d. h. unter möglichst großem Gesichtswinkel erscheint«. Ein Teil der Aufgaben beruht auf unrichtigen physikalischen Voraussetzungen, so Aufgabe 40, in der eine Kettenlinie bei beliebig tiefem Durchhang als Parabel betrachtet wird oder Aufgabe 63 über die Durchbiegung einer kreisbogenförmigen Mauer. Die Zeichnungen, die in großer Zahl den Aufgaben beigefügt sind, sind für eine Einführung in die Technik wenig geeignet. Die Skizze einer Dampfmaschine, Abb. 26, kann man nur als eine Karrikatur ansprechen.

Mises. 457

[1]) Vergl. die Besprechung in dieser Zeitschrift, Bd. 3, 1923, S. 157.

Dr. E. **HAMMER,** Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie. Fünfte durchgesehene und erweiterte Auflage. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1923. XIX + 679 S.

Seit 1885 besitzen wir dieses mustergültige Handbuch der Trigonometrie. Aus einem bescheidenen »Lehrbehelf« für den trigonometrischen Unterricht als Einführung in die Geodäsie hat sich im vorliegenden stattlichen Bande ein die gesamte Praxis des trigonometrischen Rechnens erschöpfendes Werk entwickelt. Nicht nur der umfangreiche Formelapparat des Gebietes wird vollständig aufgebaut, sondern auch der ganze zugehörige Aufgabenkomplex in systematischer Anordnung, mit liebevoller Sorgfalt auch in allen Einzelheiten der numerischen Rechnung von der trigonometrischen Formel bis zu den Zahlwerten der gesuchten Stücke diskutiert. Hierdurch erweist sich das Buch als ein echtes Erzeugnis der angewandten Mathematik. Auf der methodischen Durchführung dieser Rechnungen ruht demnach das Schwergewicht der Darstellung: das Rechenschema, die Rechenprobe, die graphischen, tabellarischen und instrumentellen Hilfsmittel des praktischen Rechners, alles findet eingehende Beachtung, Anwendung und kritische Würdigung. Von den Instrumenten wird nur der logarithmische Rechenschieber berücksichtigt, die Rechenmaschine deshalb ausgeschlossen, weil sie sich bisher in der trigonometrischen Praxis noch wenig eingebürgert hat, ihre Ueberlegenheit über die logarithmisch-trigonometrische Rechnungsart schon deshalb fraglich ist, weil sie ja doch der Tabellen für die natürlichen Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen nicht entraten kann, und endlich der hohen Kosten wegen der Mehrzahl der trigonometrischen Rechner gar nicht zur Verfügung steht. Sehr zu begrüßen ist es, daß in der neuen Auflage einige nomographische Verfahren einen, wenn auch bescheidenen Platz gefunden haben. Wiederholt betont der Verfasser mit Lebhaftigkeit die Wichtigkeit der Erziehung zum sachgemäßen numerischen Rechnen: »Nicht nur die »lebendige Wissenschaft«, an die nach Ansicht mancher Universitätslehrer die Schultrigonometrie sich anschließen soll, auch die trigonometrische Praxis ist etwas Lebendiges! Daß bei der Schultrigonometrie und bei der Trigonometrie des Selbstunterrichts der Hauptnachdruck auf einfache, sichere, rationelle Durchführung der Zahlenrechnung zu legen ist, ist ganz zweifellos; die Zahlenrechnung als etwas Nebensächliches oder gar Inferiores hinstellen, kann nur jemand, der selbst nie rechnen gelernt hat oder der nie das Zahlenergebnis einer trigonometrischen Rechnung für weitere Zwecke gebraucht hat. Für viele Teile der Trigonometrie geht sogar der Weg zum richtigen Verständnis nur durch die Zahlenrechnung (wie er in den wichtigsten Teilen

der darstellenden Geometrie nur durch die Zeichnung geht). Man kann in der Trigonometrie mit der Zahlenrechnung nicht früh genug beginnen und sie nicht weit genug ausdehnen. Der Vorwurf, ich wolle Schüler und Studierende zu »Zahlensimpeln« machen, kann mich nicht beirren; ich kann meine bald 30-jährige Unterrichts- und Prüfungspraxis dagegensetzen.« Und dann folgt noch eine kleine, aber ergötzliche Statistik von Ergebnissen der württembergischen Lehramtsprüfung in trigonometrischen und mathematisch-geographischen Aufgaben. Neben die mathematische Logik stellt er die mathematische Technik als gleichberechtigten Faktor in der Ausbildung, das oft verachtete »Handwerkern« ist ihm eine notwendige Vorbereitung für die Beherrschung der letzteren.

Seiner Bestimmung zum Selbstunterricht, namentlich für den Lehrer der Trigonometrie, wird das Buch gerecht durch die gründliche Herleitung aller goniometrischen Funktionen, ihrer Eigenschaften und Formeln aus den geometrischen Elementen, der Berechnung ihrer Zahlwerte, der Grundformeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie, wobei stets auf ihre Allgemeingültigkeit für alle Winkel, wenigstens des Halb- und Vollkreises und auf die Gedächtnishilfen für die Einprägung geachtet wird, durch zahlreiche, aus der Unterrichts-, Prüfungs- und Messungspraxis stammende Uebungsbeispiele, die teils vollständig durchgerechnet werden, teils tabellarisch mit den Ergebnissen zusammengestellt sind, und durch die häufig eingestreuten literarischen Hinweise auf Lehrbücher und Quellen. Ich erwähne ferner den vortrefflichen geschichtlichen Ueberblick über die Entwicklung der Trigonometrie und die Wiederbelebung der griechischen durch Ptolemäus überlieferten Chord- (oder Sehnen-) rechnung zu propädeutischem Zwecke. Weitergehende Anmerkungen literarischer, geschichtlicher und polemischer Natur sind noch einmal am Schluß zusammengestellt. Sie bilden eine äußerst wertvolle Ergänzung des mathematischen Inhalts, sind in lebendigem, bisweilen zum Humor gesteigerten und doch nirgends verletzendem Tone gehalten. Auch hier betont Hammer wieder eifrig die Wichtigkeit, die Schüler aller unserer Mittelschulen in praktischer Mathematik zu unterweisen, ihn nicht bloß mit einem »Einblick in den Zusammenhang der Elementarmathematik« zu befriedigen.

In diesem durchaus der messenden und rechnenden Praxis zugewandten Geiste ist das ganze Buch geschrieben. Dies tritt besonders deutlich in der Verbindung des trigonometrischen Lehrgebäudes mit den vornehmlich und von altersher auf seinen Gebrauch angewiesenen angewandten Wissenschaften der Vermessungskunde (Geodäsie), der mathematischen Geographie und der Astronomie hervor. Die erste erscheint im dritten Kapitel des zweiten, von der ebenen Polygonometrie handelnden Abschnittes als Aufgaben aus der elementaren Vermessungskunde, im vierten Kapitel §§ 40, 41 als Hauptaufgaben der Kleintriangulation und geodätischen Punktbestimmung, das fünfte Kapitel behandelt die ebenen Polygonzüge. Das zweite Anwendungsgebiet tritt zusammen mit einigen Anwendungen auf die Stereometrie im dritten Kapitel des die sphärische Trigonometrie umfassenden dritten Abschnitts, das dritte als Grundzüge der sphärischen Astronomie im vierten Kapitel auf. Die wichtigsten Aufgaben über Orts- und Zeitbestimmung sind gelöst und an Beispielen so erläutert, daß der ganze Rechnungsgang von der Messung an den beobachteten Sternen bis zur Ermittlung der gesuchten Größen (etwa geographische Breite, Länge, Ortszeit) klar vor uns liegt, ohne daß auf die geodätischen oder astronomischen Instrumente selbst und damit auf den Ausgleich der Beobachtungsfehler eingegangen wird. Wohl aber finden wir das Werk reich durchsetzt mit den für solch praktischen Anwendungen der Trigonometrie charakteristischen Näherungsverfahren, sei es, um etwa an Drei-, Vielecken und anderen Figuren mit kleinen Winkeln, an flachen Kreisbögen u. dergl. einen raschen oder sicheren Weg zum numerischen Endwert zu finden, oder die Berechnung verhältnismäßig kleiner Kugeldreiecke, wie sie in der Geodäsie meist vorkommen, mit Hilfe des Legendreschen Lehrsatzes durch Zurückführung auf ebene Dreiecke zu erleichtern. Damit ist ein Kreis von Aufgaben berücksichtigt, der nach F. Klein wesentlich der Approximations-Mathematik angehört.

So ist es dem Verfasser gelungen, die Vorzüge eines Lehr- und Handbuches in einem einzigen Werke zu verschmelzen, indem er sich auf das praktische und elementare Gebiet der Trigonometrie beschränkt hat. Vielleicht hat ihn dieser mehr auf das Können und die technische Fertigkeit gerichtete Blick auch einmal vom rechten Wege abirren lassen: die verunglückte Definition des Funktionsbegriffes (S. 28), die Einführung der imaginären Einheit vermittels des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten $+1$ und -1 (S. 178) scheinen mir doch eine gewagte mathematische Logik des verdienten trigonometrischen Rechenmeisters Hammer zu sein. Sehr vermißt man ein Sachregister. Der Druck der Formeln und Rechnungen ist, durch Verwendung von fetten Lettern, gut lesbar und übersichtlich. Die Figuren sind einwandfrei, wenn sie auch z. B. den sphärischen Dreiecken nicht die plastische Wirkung der Zeichnungen in Hessenbergs Trigonometriebändchen der Sammlung Göschen verleihen.

Jena. Winkelmann. 479

Dr. LUDWIG **PETERS**, Vektoranalysis. Mit 24 Figuren. Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Band 57. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1924. 40 S. Preis kart. 0,80 M.

Das kleine Buch versucht, dem Leser die Grundbegriffe der Vektorrechnung mit einfachen, geometrischen und physikalischen Hilfs-

mitteln und ein wenig Differentialrechnung, also den mathematischen Kenntnissen, mit denen etwa der gut ausgebildete Abiturient einer preußischen Oberrealschule die Anstalt verläßt, beizubringen. So behandelt der erste Abschnitt: Elemente die Grundbegriffe der Vektoralgebra an der Hand mechanischer oder physikalischer Beispiele: die Addition, die drei Multiplikationen, rechtwinklige Komponentenzerlegung, nebst einigen kleinen geometrischen und mechanischen Anwendungen. Der 6. Abschnitt: Vektorlinien und Niveauflächen gehörte eigentlich besser in den zweiten, die Differentialoperationen beschreibenden Teil hinein, der enthält: die Differentiation nach einem Skalar, den Gradienten eines Skalars, Divergenz und Rotor eines Vektorfeldes. Dazu treten die drei wichtigsten Differentialoperationen 2. Ordnung: divgrad, rotgrad, divrot, das wirbel- und quellenfreie Feld, das allgemeine als Ueberlagerung beider, und ein kurzer Ausblick auf die Integralsätze. Die Vektorbezeichnung durch deutsche Buchstaben ist die in der Physik gebräuchlich gewordene, dagegen werden erfreulicherweise für Skalar- und Vektorprodukt die Gibbsschen . und × Zeichen, nicht die Klammern verwendet. Bei dem geringen Umfang und den engen Voraussetzungen im Rahmen der Sammlung konnten die Ableitungen und Erläuterungen nur sehr knapp ausfallen, oft werden die Beweise bloß angedeutet. Ich weiß nicht, ob ein solches Verfahren für den Leserkreis dieser Bibliothek immer angebracht ist, ob ihm z. B. mit der schematischen Darstellung der Rotation im 15. Abschnitt recht gedient ist. Das Ziel ist vielleicht zu weit gesteckt worden.

Auf einige Irrtümer und Unklarheiten sei, auch im Interesse der Verbesserung künftiger Auflagen, hier kurz hingewiesen. Als Beispiel für einen Vektor wird neben der (geradlinigen) Verschiebung der »Weg« angeführt, ohne daß dieser mehr oder minder unbestimmte Begriff der außerwissenschaftlichen Verkehrssprache eine präzise Umgrenzung erfährt. Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit eines »um eine Achse drehbaren« starren Körpers ist kein gebundener, sondern ein freier Vektor. Ueberhaupt gehört der geometrische Unterschied zwischen freien, gebundenen und linienflüchtigen Vektoren gar nicht in die Vektorrechnung hinein. In den Beispielen zur Vektoraddition (Nr. 3) werden nur Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt zusammengesetzt, trotzdem heißt es vorher ganz unklar: »Ueberhaupt bilden die Kräfte der Statik und der mit ihrer Hilfe behandelten Gebiete das vornehmste Beispiel eines Vektors, und zwar eines linienflüchtigen Vektors.« Einer Gleichung zwischen zwei Vektoren entsprechen nicht zwei, sondern drei »arithmetische« (besser skalare) Gleichungen, indem außer der Größe zur Gleichsetzung ihrer »Richtungen« die zwei Bestimmungsstücke derselben übereinstimmen müssen. Die wesentliche Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors nach drei gegebenen Richtungen, insbesondere der rechtwinkligen Koordinatenachsen, tritt gegenüber der betonten Vieldeutigkeit der Zerlegung bei der Komponentendarstellung gar nicht hervor. Es ist unzweckmäßig, das Skalarprodukt mit dem inneren, das Vektorprodukt mit dem äußeren Produkt zu identifizieren, und damit die dem Graßmannschen System angehörigen, mit den selbständigen Plangrößen und ihrer Ergänzung eng verbundenen Begriffe in das Gibbssche, von den Physikern angenommene System, dem beides fremd ist, zu verpflanzen. S. 19 verwandelt sich der starre Körper unversehens in einen festen. In $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ ist $d\mathfrak{s}$ nicht definiert und gleich darauf in der Form $\mathfrak{v} = \frac{ds}{dt} A_0$, durch einen Druckfehler entstellt, ganz unverständlich geworden, weil die geometrische Deutung von $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ im 11. Abschnitt fehlt. Auf S. 32 erfahren die Rotorkomponenten eine Deutung als Arbeitsbeträge, die bei der Umkreisung von endlichen Flächenstücken mit dem Inhalt 1 (Zirkulationen) von dem gegebenen Feldvektor geleistet werden, nachdem eben durch Grenzübergang gezeigt worden ist, daß jene Arbeiten sich auf verschwindend kleine Flächenlemente der (rechtwinkligen) Raumeinteilung des ursprünglichen Vektorfeldes beziehen. Sinnstörend ist auch die Verwendung des Buchstabens ρ in Abschnitt 19 als Skalar und Vektor.

Jena. Winkelmann. 480

Dr. EMIL MÜLLER, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Vorlesungen über darstellende Geometrie. I. Band: Die linearen Abbildungen. Bearbeitet von Dr. **ERWIN KRUPPA**, a. o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 104 Textfiguren. Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1923. XVI + 292 S.

Das Buch, aus dessen Inhalt E. Kruppa in einem »Zusammenfassenden Bericht« in dieser Zeitschrift[1]) das Wesentlichste mitgeteilt hat, zeichnet sich durch zweierlei aus. Erstens durch die Schönheit und Klarheit der Darstellung, zweitens aber dadurch, daß hier wohl zum ersten Mal den Elementarmethoden der darstellenden Geometrie der allgemeine Abbildungsbegriff der Geometrie zugrunde gelegt und damit ein einheitlicher Aufbau erzielt wird. Der erste Teil behandelt den wichtigsten Fall der linearen ausgearteten Abbildung des Raumes: die Zentralprojektion. Dabei wird — und auch das scheint mir ein Vorzug des Buches zu sein — besonderer Wert auf vollkommene Lösung aller metrischen Aufgaben gelegt, indem die Maßbegriffe als projektive Beziehungen zu gewissen absoluten Elementen gedeutet werden. Die Abbildung der Strahlenmannigfaltigkeiten wird — nach einer über-

[1]) E. Kruppa, Ueber neuere Fortschritte der darstellenden Geometrie. Diese Ztschr. 4 (1924), S. 411 ff.

sichtlichen Zusammenfassung der liniengeometrischen Grundbegriffe — mit großer Sorgfalt durchgeführt.

Der zweite Teil ist der allgemeinen Theorie gewidmet. Die Verfasser wollen zeigen, daß sich in den üblichen Abbildungsverfahren drei Prinzipien erkennen lassen: »Das Zweispuren-, Zweibilder- und achsonometrische Prinzip.« (Vergl. den zitierten Aufsatz von Kruppa.) Ueber eine solche Einteilung der bekannten Methoden kann man freilich anderer Meinung sein. Zum mindesten erscheint die Auffassung, den Strahl zum Ausgangselement des »Zweispurenprinzips« zu machen, nicht erforderlich und ließe sich durch eine zum »Zweibilderprinzip« duale Auffassung ersetzen. Die metrischen Probleme, insbesondere die Verallgemeinerung des Pohlkeschen Satzes, sind wieder mustergültig dargestellt.

Der dritte Teil endlich enthält neben den üblichen Spezialisierungen die sehr allgemein behandelte kinematische Abbildung von Blaschke und Grünwald, die Gelegenheit zu knappen Ausblicken auf die nicht-euklidische Geometrie bietet. Ein kurzes Schlußkapitel deutet Zusammenhänge mit der Strahl-Kugeltransformation von Lie an. Ich glaube, daß die in der Einleitung des Buches ausgesprochene Hoffnung berechtigt ist, daß es nämlich »zur wissenschaftlichen Belebung der darstellenden Geometrie beitragen möge«.

Rehbock. 508

Dr. EMIL **MÜLLER,** o. ö. Professor an der Techn. Hochschule in Wien. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Zweiter Band. Mit 328 Textabbildungen. Dritte Auflage. Leipzig-Berlin 1923, Verlag B. G. Teubner. X + 362 S.

Die vorliegende 3. Auflage ist gegenüber der 2. Auflage des 2. Bandes nur durch wenige stilistische Verbesserungen und Literatur-Ergänzungen verändert. Auf die neuen theoretischen Untersuchungen, die in einem eigenen Werk behandelt wurden, ist nur in einigen Anmerkungen Bezug genommen. Was dem Buche seinen großen Wert verleiht, ist die mathematische Gründlichkeit und Verläßlichkeit, wie sie aus der völligen Durchdringung des Stoffes herauswächst, die systematische Srenge der Darstellung, die aber auch praktischen Erwägungen Raum gibt, und die große Zahl der wirklich durchgeführten Aufgaben. Der Stoff gliedert sich in 4 Abschnitte: Kotierte Projektion und deren Anwendungen, rechtwinklige Axonometrie, schiefe Axonometrie samt schiefer Projektion, Perspektive. Manche neue Gesichtspunkte sind dem vielfach behandelten Stoffe abgewonnen. Zahlreiche Anmerkungen bringen das historisch Wichtigste, sowie sehr viele Literatur-Angaben, wobei namentlich auch die österreichischen Arbeiten berücksichtigt sind. Die Bezeichnung ist oft recht kompliziert, wird sich aber kaum wesentlich vereinfachen lassen. Die Figuren lassen nichts zu wünschen übrig.

Aus dem reichen Inhalte sei nur einiges hervorgehoben. Die kotierte Projektion wird angewandt auf die Behandlung der Geländefläche und auf Dachausmittlung. Satz 2 auf S. 62 gibt hier in sehr klarer Weise die mathematische Lösung. Bei der rechtwinkligen Axonometrie wird wohl mit Recht darauf hingewiesen, daß es praktisch gar keinen Vorteil bietet, für die Verkürzungsverhältnisse ganzzahlige Verhältniszahlen zu wählen; das eine möchte der Berichterstatter allerdings hinzufügen: die Verhältniszahlen 9 : 5 : 10 liefern sehr schöne Bilder. Die Grundaufgaben, ferner die Schattenkonstruktionen, die Darstellung der Regel- und Rotationsflächen werden sowohl in rechtwinkliger als in schiefer Axonometrie durchgeführt. Die letztere erfreut sich der besonderen Vorliebe des Verfassers. Mathematisch sind die betreffenden Betrachtungen durchaus interessant. In der Praxis aber wird sich die allgemeine schiefe Axonometrie wohl kaum einbürgern. Denn die sogen. schiefe Projektion liefert ebenso schöne Bilder und ist in jeder Hinsicht einfacher und bequemer. Auch die Perspektive ist in der Weise behandelt, daß sobald als möglich durch Einführung der Grundebene und Bestimmung der Elemente durch Zentralriß und Zentralbild des Grundrisses die Selbständigkeit der Darstellung erreicht wird und nun wieder die obigen Aufgaben auch in dieser Projektion erledigt werden. Ein paar ganz kurze Bemerkungen sind auch der Photogrammetrie gewidmet. Auf S. 243, Zeile 13 v. u. fehlt die linke Seite der Gleichung zum Teil. Was ferner die zweite Fußnote auf der gleichen Seite betrifft, so können die Sonnenstrahlen schlechthin nicht als parallel gelten, sondern nur die Sonnenstrahlen, die von einem Punkte der Sonne ausgehen. Daß die Sonne nicht als ein leuchtender Punkt angesehen werden kann, zeigt ja schon die oberflächlichste Betrachtung der Schatten. Was die Bestimmung der Distanz (S. 272) betrifft, so wählen die Praktiker oft gar keinen Umdrehungskegel, in den das Objekt hineingestellt wird, sondern sie wählen in der Vertikalebene nach auf- und abwärts verschiedene Winkel und in der Horizontalebene wieder einen davon verschiedenen Winkel. Die Figur 233 auf S. 227 zeigt versehentlich den Innenschatten der Kugel von der Eigenschattengrenze ab dunkler schattiert. Endlich muß noch die merkwürdige Vorliebe des Verfassers für kurze, kraftvolle Wortbildungen erwähnt werden. Ich nenne als solche Strahlgeometrie, Strahlgebilde, Drehfläche, Drehsehne, Steigwinkel, Schiebflächen statt Strahlengeometrie, Drehungsfläche, Steigungswinkel, Schiebungsfläche. Vielleicht liegt eine unrichtige Analogie vor mit Drehscheibe oder Drehbank. Auf S. 157 wird auch die Schraubenlinie in Schraublinie umgestaltet. Diese unschönen Bildungen sollten sich nicht einbürgern.

München, 2. Januar 1923.

Karl Doehlemann. 379

THEODOR **SCHMID,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Darstellende Geometrie. I. Band. Mit 170 Figuren. Dritte Auflage. Sammlung Schubert LXV. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1922. 283 S. Preis 6 M. — II. Band. Mit 163 Figuren. Zweite Auflage, Sammlung Schubert LXVI. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1923. 340 S. Preis 7,50 M.

Schon die sobald nötig gewordenen neuen Auflagen beweisen die Brauchbarkeit dieses vortrefflichen Werkes. Seinen Hauptvorzug sieht der Berichterstatter darin, daß der Verfasser einerseits die darstellende Geometrie als praktische Disziplin behandelt und technische Anwendungen gibt, daß er aber andererseits auch die mathematische Seite dieses Wissenszweiges zur vollen Geltung bringt und die Beziehungen zur neueren und zur analytischen Geometrie in eingehender Weise herstellt. So werden beispielsweise für die Abwicklungen der auf Zylindern und Kegeln gelegenen Kurven die Gleichungen gegeben und ebenso für die Drehungs- und Schraubenflächen, so daß die Behandlung eine geometrisch-analytische ist. Die Darstellung und die zahlreichen Figuren lassen nichts zu wünschen übrig. Ausgezeichnete, geschichtliche und literarische Bemerkungen, die bis auf die jüngste Zeit reichen und von großer Belesenheit zeugen, sind einzelnen Abschnitten beigegeben. Der reiche Inhalt verteilt sich auf die 2 Bände in folgender Weise: Im ersten Bande wird das Grund- und Aufrißverfahren und die orthogonale Axometrie, sowie die Schatten-Konstruktion behandelt und auf Kugel, Kegel, Zylinder und deren Durchdringungen angewandt. Der zweite Band ist der schiefen Projektion und Zentralprojektion gewidmet, sowie der Untersuchung der Umdrehungsflaschen, Schraubenflaschen und Regelflaschen, der Geländedarstellung und der Nomographie. Karl Doehlemann.

München, Mai 1925. 528

JEAN **PERRIN,** Die Atome. Deutsch herausgegeben von Dr. A. Lottermoser. 8°. 213 S. Dritte erweiterte Auflage. Dresden und Leipzig 1923, Verlag von Theodor Steinkopff.

Wer heute an die Lektüre des bekannten Perrinschen Werkes herangeht, der sieht sich zunächst, was die Ausgangspunkte und die Berücksichtigung der einzelnen Probleme angeht, in der Geschichte der Atomphysik um ein volles Jahrzehnt zurückversetzt, einen für die Begriffe des modernen Physikers recht beträchtlichen Zeitraum. In mehr als zwei Dritteln des Buches ist fast nur von den Grundgesetzen der Chemie, kinetischer Theorie der Materie, Brownscher Bewegung, Theorie der Schwankungserscheinungen die Rede, Dingen, die wir heute schon mit dem Prädikat »klassisch« zu belegen gewohnt sind. Und in diese Rubrik gehören ja auch die hier eingehend erörterten eigenen Untersuchungen des Verfassers über Brownsche Bewegung. Erst das sechste Kapitel bringt ganz kurz die Grundlagen der Theorie der Wärmestrahlung und daran anschließende Folgerungen der Quantentheorie. Fragen der Jonisation der Gase und die Messungen des elektrischen Elementarquantums werden behandelt, einiges über Korpuskularstrahlen, Magnetonen und die alte Ritzsche Theorie der Spektrallinien berichtet. Der Abschnitt über Auf- und Abbau der Atome enthält im Wesentlichen eine Besprechung der Eigenschaften radioaktiver Elemente, insbesondere des radioaktiven Zerfalls, und der Methoden der Zählung der α-Teilchen. Erst im Anhang wird auf $7^1/_2$ Seiten die Bohrsche Theorie erklärt und ein Verzeichnis der bekannten Elemente, einschließlich der Isotopeneigenschaften, gegeben. Man wird, obgleich in die Darstellung überall neue Ergebnisse eingearbeitet sind, in einem Buche, das den Titel trägt »Die Atome«, selbst die bloße Erwähnung von Problemkreisen (z. B. Elektronenstoßfragen, Einzelheiten der Spektraltheorie usw.) vermissen, die heute in der Theorie der Materie mit den breitesten Raum einnehmen. Freilich wird man in manchen inzwischen erschienenen Büchern gerade diese Fragen sehr ausführlich und genußreich erörtert finden.

Jedenfalls beweist das Erscheinen der dritten Auflage der von Lottermoser (nach der verbesserten zweiten Auflage des französischen Originals) herausgegebenen Uebersetzung, daß das Werk auch in Deutschland viele Anhänger gefunden hat. Laski. 377

ARTHUR **HAAS,** Dr. Phil. a. o. Professor der Universität Wien. Das Naturbild der neuen Physik. Zweite, wesentlich vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 17 Figuren im Text und auf zwei Tafeln. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1924. 160 S.

In zweiter Auflage erscheint die kleine Reihe allgemein verständlicher Vorträge von Arthur Haas, dem die besondere Gabe knapper und klarer Darlegung eignet. Wer immer, ohne Zeit zu eingehenden Studien zu haben, sich zuverlässige Kenntnis von dem verschaffen will, was den heutigen Physiker im wesentlichen beschäftigt, wird in dem Büchlein von Haas das Gesuchte finden. Die acht Vorträge behandeln der Reihe nach die elektromagnetische Theorie des Lichtes, die Molekularstatistik, die Elektronen- und Quantentheorie, die Theorie der Grundstoffe, die Relativitätstheorie, die Physik der Sterne, und das Weltall. Mehrere Abbildungen, zahlreiche Anmerkungen und eine chronologische Uebersicht ergänzen die Darstellung in vorteilhafter Weise. Mises. 514

Dr. E. **CZUBER,** o. ö. Professor der Technischen Hochschule in Wien. Mathematische Bevölkerungstheorie. Auf Grund von G. H. Knibbs' »The mathematical theory ov Population«. Mit 71 Figuren im Text. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1923. VI + 357 S. Grundzahl geh. 16,60 M.

Das Werk des australischen Staats-Statistikers G. H. Knibbs, von dem E. Czuber in deutscher Sprache das Wesentliche wiedergibt, stellt eine ausführliche systematische Sammlung statistischer Angaben dar, die den Aufnahmen der australischen statistischen Behörden entnommen sind. Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, an Hand dieses umfassenden und einheitlichen Materials eine Einführung in die Begriffsbildungen und Methoden der Bevölkerungsstatistik zu geben. Nach einer recht kurzen Einleitung, die einige Grundformeln entwickelt, werden — unter gelegentlicher Einschaltung weiterer prinzipieller Betrachtungen — die einzelnen Gruppen statistischer Aufnahmen unter Wiedergabe kleiner Tabellen und Kurventafeln erörtert. Es kommen hauptsächlich zur Sprache: Fluktuation der Bevölkerungen, Verteilung der Bevölkerung nach Geschlecht und Alter, Natalität, Ehestatistik, Fruchtbarkeit und Ergiebigkeit, Sterblichkeit und Wanderungen. Man wird dem verdienten Bearbeiter der deutschen Ausgabe Dank dafür wissen, daß er den reichen Schatz von Erkenntnissen aus dem Gebiete der praktischen Statistik, der in dem Knibbsschen Werk niedergelegt ist, leicht zugänglich gemacht hat. Bei dem zunehmenden Interesse, das die Technik statistischen Untersuchungen entgegenbringt, wird das deutsche Buch, das leicht lesbar ist, und keine besonderen mathematischen Anforderungen an den Leser stellt, sicherlich viel Verbreitung und Anklang finden. Mises. 512

E. **WEIGHARDT,** Mathematische Geographie und Astronomie für die Oberprima der Realanstalten (und für Studierende zur Einführung) in geschichtlicher Entwicklung. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1924. VII + 127 S. Preis geb. 2,50 M.

Dem Lehrgang der Schrift liegt eine geschichtliche Anordnung zugrunde; sie sucht innerhalb eines jeden der beiden Hauptteile, Altertum und Neuzeit, Erscheinungen und Erklärungen zu trennen. Daß sich dies nicht durchführen läßt, zeigt der zweite Teil, übrigens nicht zum didaktischen Nachteil der Darstellung. Das Büchlein ist nicht schlechter und nicht origineller als andere von erfahrenen Schulmännern in den letzten Dezennien in Anlehnung an ministerielle Lehrpläne geschriebene Leitfäden der mathematischen Geographie. Direkte massive Unrichtigkeiten kommen nicht vor; schiefe Darstellungen, sachlich und historisch, nicht selten. Die wenigen Absätze, die einiges zur Astrophysik und Kosmogonie bringen, dürftig und veraltet. Unter den Figuren ist das Klischee Nr. 67 (S. 114, Herschels Weltbild) nicht mehr zu verantworten. Wirtz. 485

G. **HESSENBERG,** Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft. Mit einer Tafel. Bei I. C. B. Mohr (Paul Siebeck) in Tübingen in Kommission. 1924. 16 S.

Die vorliegende Schrift unterzieht sich der Aufgabe, die Gelenkmechanismen zusammenfassend zu behandeln. Als besonders wertvoll ist die Darstellungsweise hervorzuheben, die an Klarheit und Einfachheit kaum übertroffen werden kann und dabei den Gegenstand vollkommen erschöpft.

Dresden. Alt. 523

NACHRICHTEN

Heinrich Müller-Breslau †. Am 23. April ds. Js. ist das Mitglied unserer Schriftleitung, Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Heinrich Müller-Breslau im 74. Lebensjahre gestorben. Sein Ruf als Schöpfer des modernen Eisenbaues in Deutschland, als grundlegender Forscher auf dem Gebiete der graphischen Statik und der Baukonstruktionslehre ist über die ganze Welt verbreitet. Zu seinem 70. Geburtstag im Mai 1921 ist an dieser Stelle eine kurze Würdigung seines Lebenswerkes und seiner Persönlichkeit veröffentlicht worden. Der immer rüstige und schaffensfreudige Mann hat noch bis in die allerletzte Zeit seines Lebens der wissenschaftlichen Tätigkeit nicht entsagt. Es ist für uns eine wehmütige Feststellung, daß der erste Beitrag, den er unserer Zeitschrift widmen konnte, zugleich die letzte Veröffentlichung aus seiner Hand war; die Arbeit »Zur Berechnung der Knicklast des Rahmenstabes« ist im vorigen Bande S. 487—490 erschienen.

Wir geben im folgenden eine kurze Uebersicht über die wichtigsten Veröffentlichungen des Verstorbenen, die wir teils der Festschrift, die ihm nach Vollendung seines 60. Lebensjahrs von Freunden und Schülern gewidmet worden ist, teils der freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Reissner verdanken.

Veröffentlichungen vor 1883.

Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880.

Theorie der durch einen Balken versteiften Kette. (Zeitschr. d. Arch.- und Ing.-Vereins Hannover 1881, 1883.)

Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens. (Zivilingenieur 1883.)

Influenzlinien für kontinuierliche Träger mit drei Stützpunkten. (Wochenblatt für Arch. und Ing. 1883.)

Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogenträger. (Zeitschr. f. Bauwesen 1883.)

Elastizitätstheorie der Tonnengewölbe. (Zeitschr. f. Bauwesen 1883.)

In Hannover 1883 bis 1888.

Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1886. (5. Auflage erschien Leipzig 1924.)

Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens. (Zeitschr. f. Bauwesen 1884.)
Ueber kontinuierliche Bögen und Balken. (Wochenblatt f. Arch. und Ing. 1884.)
Elastizitätstheorie der nach der Stützlinie geformten Tonnengewölbe. (Zeitsch. f. Bauwesen 1884.)
Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger. (Zeitschr. d. Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1884.)
Beitrag zur Theorie des Fachwerks. (Ebenda 1885.)
Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks. (Schweiz. Bauztg. 1887.)
Zur Frage der Berücksichtigung der Anfangsspannungen von Trägern. (Wochenschr. des Oesterr. Arch.- und Ing.-Ver. 1887.)
Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger. (Ebenda 1888.)
Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern. (Allg. Bauztg. Wien 1885.)
Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern. (Zeitschr. d. Arch.- und Ing.-Vereins Hannover 1886.)

In Berlin 1888 bis 1911.

Graphische Statik der Baukonstruktionen. 1. Bd. Leipzig 1887. 5. Auflage 1912. — 2. Bd. 1. Abt. Leipzig 1892; 5. Auflage 1922. — 2. Bd. 2. Abt. Leipzig 1908; 2. Auflage 1925.
Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger. (Zentralbl. d. Bauverwaltung 1889.)
Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen. (Zeitschr. f. Bauwesen 1891.)
Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. (Zentralbl. d. Bauverwaltung 1891/92.)
Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbogenbrücken. (Ebenda 1898.)
Beiträge zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer u. verwandter Konstruktionen. (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure 1898, 1899.)
Die Berechnung achtseitiger Turmpyramiden. (Ebenda 1899.)
Der Kaisersteg über die Spree bei Oberschöneweide. (Zeitschr. f. Bauwesen 1900.)
Ueber räumliche Fachwerke. (Zentralbl. d. Bauverwaltung 1902.)
Ueber die Bildungsgesetze ebener Fachwerke und deren Anwendung bei Bestimmung der Spannungen. (Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen 1904.)
Beiträge zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken. (Ebenda 1904, 1905.)
Erddruck auf Stützmauern. (Stuttgart 1906.)
Ueber exzentrisch gedrückte, gegliederte Stäbe. (Sitzungsber. d. Pr. Ak. d. Wiss. 12. Febr. 1910.)
Ueber exzentrisch gedrückte Stäbe und über Knickfestigkeit. (Eisenbau 1911.)

In Berlin 1911 bis 1924.

Zur Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen; drei Abhandlungen. (Eisenbau 1916, 1917.)
Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme. (T. B. der Flugzeugmeisterei 1918.)
Zur Berechnung von Tragflächenholmen; drei Abhandlungen. (Zeitschr. f. Flugtechn. und Motorluftsch. 1918/19/20.)
Zur Frage der Knicksicherheit biegungsfester Fachwerkstäbe. (Zentralbl. d. Bauverwaltung 1919.)
Ueber Knickfestigkeit. (Ebenda 1919.)
Zur Berechnung zweistieliger Rahmentragwerke über drei Oeffnugen. (Zentralbl. d. Bauverwaltung 1922.)
Zur Berechnung gegliederter Druckstäbe. (Bauingenieur 1923.)
Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen. (Sitzungsber. d. Pr. Ak. d. Wiss. 1924.)
Zur Berechnung der Knicklast des Rahmenstabes. (Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1924.) 530

Walter Birnbaum †. Aus dem Kreise der jüngsten Mitarbeiter unserer Zeitschrift hat der Tod unerwartet früh einen der Zukunftsreichsten von uns genommen. Dr. phil. Walter Birnbaum, der am 9. April 1897 in Zittau in Sachsen geboren war, in Leipzig und Göttingen studiert hatte, promovierte 1922 in Göttingen. Er war 1923/24 als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Turbinenfabrik der AEG in Berlin tätig. Zu Beginn des Jahres 1925 trat er in die Göttinger aerodynamische Versuchsanstalt von Prof. Prandtl ein. In Göttingen verschied er am 20. Februar ds. Js. Von seinen Arbeiten sind in dieser Zeitschrift die folgenden beiden erschienen: »Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie«, Bd. 3 (1923), S. 290 bis 297 und »Das ebene Problem des schlagenden Flügels«, Bd. 4 (1924), S. 277 bis 292. Birnbaum veröffentlichte überdies eine Arbeit über den Schlagflügelpropeller in der Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1924, und ebenda 1925 eine Untersuchung der Biegungsschwingungen von Schraubfedern; ferner in der Zeitschr. f. Techn. Physik 1924 optische Untersuchungen des Spannungszustandes in Maschinenteilen und 1925 eine Abhandlung über erzwungene Schwingungen biegsamer Stäbe.

Wir werden dem begabten Mitarbeiter, der sich unter allen, die ihn kannten, nur Freunde erworben hat, stets ein treues Andenken bewahren. 530

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Hauptversammlung in Danzig. Es wird nochmals darauf hingewiesen, daß auf der Hauptversammlung in Danzig in erster Linie Fragen der praktischen Hydraulik behandelt werden sollen. Vortragsanmeldungen aus diesem oder aus anderen Gebieten der angewandten Mathematik und Mechanik sind möglichst umgehend an den Vorsitzenden, Prof. Prandtl, Göttingen, oder an den Geschäftsführer, Prof. v. Mises, Berlin, zu richten. 530

Hydraulik-Tagung in Göttingen am 5. und 6. Juni 1925. Auf Anregung einiger Dozenten des Wasserkraftmaschinenbaues an deutschen Hochschulen veranstaltete der Verein deutscher Ingenieure am 5. und 6. Juni ds. Js. in Göttingen eine Besprechung über Fragen der Strömungslehre und der praktischen Hydraulik, zu der etwa zwanzig Fachleute eingeladen waren. Als Vertreter des VdI begrüßte Direktor Dr. Bauersfeld-Jena die Versammlung und übernahm den Vorsitz der ersten Sitzung. Zunächst berichtete Prof. Prandtl-Göttingen über einige Ergebnisse der in seinem Institut durchgeführten Turbulenzforschungen, soweit sie für den Turbinenbau von Bedeutung sind. Prof. Föttinger-Charlottenburg und Prof. Thoma-München machten interessante Mitteilungen über Kavitations- und Korrosionserscheinungen, die bekanntlich auf die Betriebsfähigkeit von Wasserturbinen und Schiffspropellern von entscheidendem Einfluß sind. Hieran schloß sich eine eingehende Aussprache, an der sich fast alle Anwesenden beteiligten und die deutlich zum Ausdruck brachte, wieviel ungeklärte Fragen verschiedenster Richtung hier noch vorliegen. Prof. Spannhake-Karlsruhe trug über ein von ihm gefundenes Verfahren, die Strömung an Kreiselrädern mit Hilfe der konformen Abbildung zu behandeln, vor[1].

Am Nachmittage des 5. Juni besichtigten die Teilnehmer der Tagung unter Führung von Prof. Prandtl und Dr. Betz das Universitätsinstitut für angewandte Mechanik, das aerodynamische Institut der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft und das im Bau befindliche Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung. Eine große Zahl von interessanten Versuchsanordnungen, u. a. ein Modell des Flettner-Rotors, waren aufgestellt und konnten den Besuchern vorgeführt werden.

In der zweiten Sitzung am 6. Juni unter Vorsitz von Geheimrat Prof. Reichel-Charlottenburg sprach Dr. Betz-Göttingen über die Berechnung der Spaltverluste bei Turbinen nach den Grundsätzen der Prandtlschen Tragflügeltheorie. Ein Vortrag von Prof. Flügel-Danzig galt der schätzungsweisen Berechnung der verschiedenen an Kreiselrädern auftretenden Energieverluste. An den letzten Vortrag von Prof. Oesterlen-Hannover über die Untersuchung der Turbinen-Saugrohre schlossen sich noch drei kürzere Mitteilungen außerhalb der Tagesordnung an. Die eine von Prof. Thoma-München betraf die experimentelle Feststellung von zwei verschiedenen Ausflußzahlen an ein und derselben Ausflußöffnung. Dipl.-Ing. Schilhansl sprach über amerikanische Saugrohrversuche, Prof. Pfleiderer-Braunschweig über den Einfluß des Schaufeldruckes bei Turbinen.

Der volle Wortlaut der Vorträge und Aussprachen wird in einem Bande, den der VdI-Verlag erscheinen läßt, veröffentlicht werden.

[1]) Der Vortrag wird in dieser Zeitschrift erscheinen.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Knickung von Schraubenfedern. 1. Zu dem in dieser Zeitschrift (Bd. 4, Heft 5, S. 384 u. f.) erschienenen interessanten Aufsatz von Herrn Grammel möchten wir eine kurze ergänzende Bemerkung machen, die dazu beitragen soll, einen von uns festgestellten Widerspruch zwischen der entwickelten Theorie und dem Experimente zu beseitigen.

An einem einfachen, in unserem Laboratorium angefertigten Modell haben wir nämlich festgestellt, daß auch in dem Falle einer Spulenlänge $\lambda < 6{,}7$ (loc. cit. S. 386) bei einer spitzengelagerten Feder Knickung auftreten kann. Das Experiment wurde ursprünglich angestellt, weil die Formel (7) (loc. cit. S. 386) in Zweifel gezogen wurde, nach welcher sich zwei voneinander verschiedene Knicklasten ergeben, deren eine nicht sinngemäß erklärt werden konnte. Sollte trotzdem die Formel (7) richtig sein, so müßte die Feder unter Druckkräften P_1 und P_2, die gleiche Differenz gegenüber den beiden Knicklasten P_{k1} und P_{k2} aufweisen ($P_2 - P_{k2} = P_{k1} - P_1$; $P_{k2} > P_{k1}$) gleiche Stabilität haben.

Es zeigte sich aber, daß diese Folgerung durch das Experiment nicht bestätigt wird, so daß wir zu der Vermutung geführt wurden, daß die in der Rechnung vernachlässigte »Schubelastizität« der Feder eine beträchtliche Rolle spielen könnte.

In der Tat ist dies der Fall, wie aus der folgenden kurzen Berechnung ersichtlich ist.

2. Nennt man die Steifigkeitszahlen der Feder gegen Biegung, Schub und Druck resp. α_0, β_0 und γ_0, wenn die Feder ihre ursprüngliche Länge l_0 hat, dagegen α, β, γ, wenn sie bis zur Länge l zusammengedrückt ist, so gilt, wenn man annimmt, daß der Knickvorgang demjenigen eines Stabes ähnlich ist, unter Berücksichtigung des Schubs, im Augenblicke der Knickung die Gleichung:

$$y'' = -\frac{Py}{\alpha} + \frac{Py''}{\beta} \quad \text{oder} \quad y'' + \frac{P/\alpha}{1 - P/\beta}\, y = 0$$

Der Term $\frac{Py''}{\beta}$ gibt an, um wieviel die Krümmung von den in den Querschnitten anwesenden Querkräften $P y'$ vergrößert wird.

Der kritische Wert der Druckkraft wird also für den Fall der spitzengelagerten Feder bestimmt durch:

$$\frac{P/\alpha}{1 - P/\beta} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad \text{oder} \quad P = \frac{\pi^2/l^2 \cdot \alpha}{1 + \pi^2/l^2 \cdot \alpha/\beta}.$$

Beachtet man, daß $\alpha = l/l_0 \cdot \alpha_0$ und $\alpha/\alpha_0 = \beta/\beta_0$ (die Feder wird sowohl gegen Biegung als gegen Schub um so elastischer, je mehr Win-

dungen pro Länge-Einheit vorhanden sind), so findet man:

$$P = \frac{\pi^2/l\, l_0 \cdot \alpha}{1 + \pi^2/l^2 \cdot \alpha_0/\beta_0}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung:

$$l_0 - l = \frac{P\, l_0}{\gamma_0};$$

$$\frac{\gamma\,(l_0 - l)}{l_0} = \frac{\pi^2/l\, l_0 \cdot \alpha_0}{1 + \pi^2/l^2 \cdot \alpha_0/\beta_0}.$$

Führt man $l/l_0 = z$ als Hilfsgröße ein, so erhält man als die Bedingungsgleichung für Ausknicken:

$$z^3 - z^2 + \left\{\frac{\alpha_0}{\beta_0} + \frac{\alpha_0}{\gamma_0}\right\} \frac{\pi^2}{l^2}\, z - \frac{\pi^2\, \alpha_0}{l_0^2\, \beta_0} = 0 \quad \text{(A)}.$$

Mit:

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{\pi\, n\, r}{E\, I} \frac{2\, m + 1}{m}; \qquad \frac{1}{\beta_0} = \frac{\pi\, n\, r^3}{E\, I};$$

$$\frac{1}{\gamma_0} = \frac{2\, \pi\, r^3\, n}{E\, I} \frac{m + 1}{m}; \qquad \delta = \frac{m}{2\, m + 1}\, \pi^2\, \frac{r^2}{l_0^2}$$

(n = Anzahl der Windungen, r = Radius des Zylinders, auf welchen die Feder gewunden ist, I = lineares Trägheitsmoment des Federquerschnittes) geht diese Gleichung schließlich über in:

$$z^3 - z^2 + \frac{3\, m + 2}{m}\, \delta\, z - \delta = 0. \quad \text{(A)}.$$

Man zeigt leicht, daß sie nur eine reelle, und zwar positive, Wurzel hat, indem man zuerst die Wurzeln um $^1/_3$ vermindert, also zur Gleichung:

$$\bar{z}^3 + \left\{\frac{3\, m + 2}{m}\, \delta - {}^1/_3\right\} \bar{z} + \frac{2}{3\, m}\, \delta - \frac{2}{27} = 0$$

übergeht, und die Bedingung für das Auftreten zweier komplexer Wurzeln bei dieser Gleichung aufstellt. Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$1 + \frac{8}{27\, m^3} > \frac{2}{3\, m^2} + \frac{1}{27\, m^4}$$

welche offensichtlich erfüllt ist.

Wir gelangen also zu dem vorher erwähnten Ergebnis, daß (abgesehen vom Aufeinanderliegen der Windungen) stets Knickung auftreten kann, und zwar bei einer Zusammendrückung der Feder, welche bestimmt ist durch den reellen Wurzelwert $z = l/l_0$ der Gleichung (A).

Das Diagramm, welches die Abhängigkeit der Größe $\frac{P_k}{\gamma_0 l_0}$ von dem Verhältnis $\frac{l_0}{r}$ liefert, ist in Abb. 1 gezeichnet, ebenso wie dasjenige, das in analoger Weise für den Fall der beiderseitig eingespannten Feder konstruiert werden kann. (Beide Fälle sind mit den Buchstaben a und b angedeutet.)

Für beide Fälle haben wir einige Federn nachgeprüft und kommen zu einer sehr guten Uebereinstimmung mit den voraus berechneten Werten, unter der Beschränkung aber, daß die Federn eine nicht zu geringe »Schlankheit« l_0/r aufweisen. In dem entgegengesetzten Falle, d. h. also bei kurzen Federn, dürfte das Verhalten der Feder doch zuviel von demjenigen eines Stabes abweichen, wie dies schließlich auch von vornherein zu erwarten ist. 507

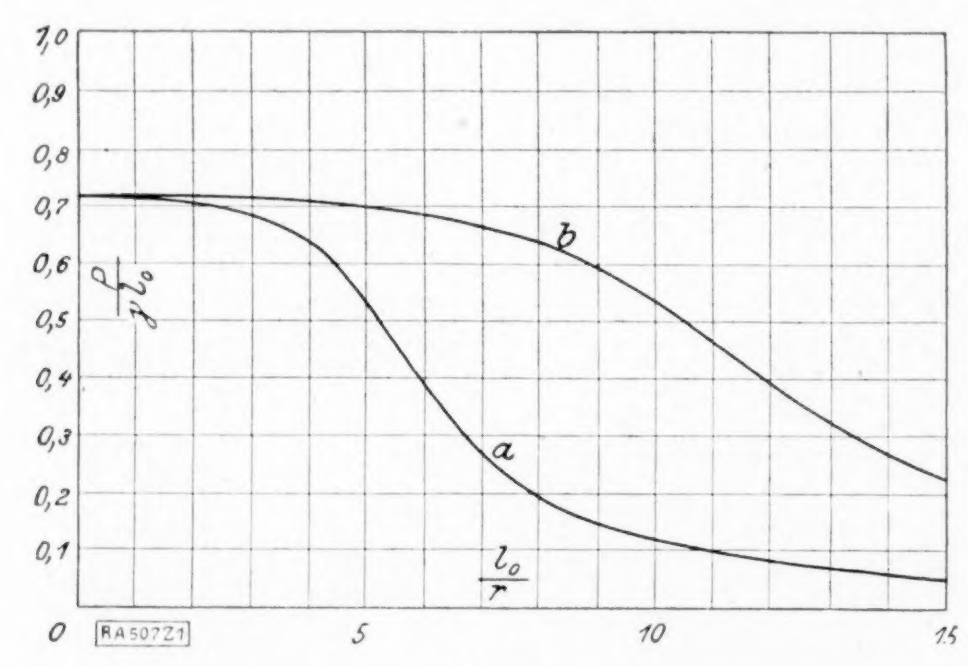


Abb. 1.

Delft. C. B. Biezeno u. J. J. Koch.

(Die Zuschrift hat Hrn. R. Grammel vor der Veröffentlichung vorgelegen. Der Herausgeber.)

(Redaktionsschluß 12. Juni 1925.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 52. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.